NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

Choice Based Credit System
(CBCS)

SELF LEARNING MATERIAL

HEC
ECONOMICS

CC-EC-07

Under Graduate Degree Programme

উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ' গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে ষাণ্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন অভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক—উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন—যদিও পূর্বের মতই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি-প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে। মুক্ত শিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সকল শিক্ষক, আধিকারিক এবং কর্মীদের আমি আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এবং ছাত্রদের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি।

অধ্যাপক (ড.) রঞ্জন চক্রবর্ত্তী

উপাচার্য

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Progreamme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যাবস্থা)

Subject : Mathematical Methods for Economics II
বিষয় : অর্থনীতির গাণিতিক পদ্ধতি-II
Course Code : CC-EC-07

প্রথম মুদ্রণ ঃ ফেব্রুয়ারী, 2023

First Print : February, 2023

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the
Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Progreamme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যাবস্থা)

Subject : Mathematical Methods for Economics-II
Course Code : CC-EC-07

: বিষয় সমিতি :

সদস্যবৃন্দ

: রচনা :

সুপর্ণা গঙ্গোপাধ্যায়
Associate Professor of Economics
Surendranath College for women

: সম্পাদনা :

সেখ সেলিম
NSOU

: বিন্যাস সম্পাদনা :

প্রিয়ন্থী বাগচী

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যাবস্থা)

Mathematical Methods for Economics-II

অর্থনীতির জন্য গাণিতিক পদ্ধতি

Course Code : CC-EC-07

একক-1 ❑ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠ করে শিক্ষার্থীরা জানতে পারবেন

(ক) ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ কাকে বলে।

(খ) ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের বৈশিষ্ট।

(গ) ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের ধরণ।

(ঘ) ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি।

(ঙ) অর্থনীতির ক্ষেত্রে প্রয়োগ

1.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতির ক্ষেত্রে ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের আলোচনা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ (Ordinary differential equation) যেমন ব্যবহৃত হয় অর্থনৈতিক বৃদ্ধি, মোট জাতীয় উৎপাদন, জাতীয় আয়, ভোগ, বিনিয়োগ ইত্যাদি সংক্রান্ত মডেল গঠনে। তেমনই স্টোক্যাস্টিক (stochastic) ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ রাজস্ব সংক্রান্ত (finance) বিষয় যেমন অ্যাসেট মূল্যর গতিময়তা ভিত্তিক মডেল বা অপশন মূল্য নির্ধারণ ইত্যাদি সংক্রান্ত বিষয়ে ব্যবহৃত হয়। এই সমীকরণের সমাধানের কেন্দ্রিয় ভিত্তি হলো সমাকলন (enlegral calculus) এই অধ্যায়ে বিশদ ভাবে প্রথম ও দ্বিতীয় মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের গঠন ও সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে।

1.3 ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ ও তার ব্যাখ্যা

যে সমীকরণ গঠিত হয় নির্ভরশীল চলকের অবকল ও স্বাধীন চলকের মধ্যে গঠিত অপেক্ষকমে কেন্দ্র করে তাকে বলা হয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ (An equation involving derivative (derivatives) of the dependent variable is called differential equation) যে ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণে কেবলমাত্র একটি স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে নির্ভরশীল চলকের অবকলগুলি গঠিত হয়ে সৃষ্টি হয়, তাকে বলা হয় সাধারণ ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ। যেখানে একাধিক স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে, নির্ভরশীল চলকের অবকলগুলি গঠনের মাধ্যমে সম্পর্ক গঠিত হয়, তাকে বলা হয় আংশিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ।

1.4 সাধারণ প্রথম মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ

প্রথম মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের রূপ হোলো ঃ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ যেখানে $f(x, y)$ xy এতলে সংজ্ঞায়িত দুই চলক বিশিষ্ট অবচল। একে প্রথম মাত্রা বলার কারণ হোলো এখানে কেবলমাত্র প্রথম মাত্রার অবকল $\frac{dy}{dx}$ যুক্ত আছে।

যে কোনো ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের মাত্রা বলতে বোঝায় সেই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সর্বাপেক্ষা অধিক শক্তির, যা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হবে, সর্বোচ্চ মাত্রার (highest power of the highest order derivative)। যে সমস্ত চলকগুলি ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সঙ্গে যুক্ত, তাদের মধ্যে অবস্থিত সম্পর্ক যা প্রদত্ত সমীকরণটিকে পূর্ণ (solution)। যে সমাধান যত মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ আছে, ততগুলি বিধিবহির্ভূত ধ্রুবক (arbitrary consrouts) গ্রহণ করে তাকে সাধারণ সমাধান (general solution) বলা হয়। যে সমাধান কোনো বিধিবহির্ভত ধ্রুবক থাকে না তাকে বিশেষ সমাধান (particular solution) বলা হয়।

যে ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণকে $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ বা $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$ যেখানে $F(x, y)$ এবং $G(x, y)$ হলো শূন্য মাত্রার সমজাতীয় অপেক্ষক তাকে বলা হয় সমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ। এই ধরণের সমীকরণ সমাধান করার জন্য একটি প্রতিস্থাপন করা হয়; $y = vx$ এবং $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সমাধান করার জন্য প্রতিস্থাপন করার প্রয়োজন হয়।

যদি কোনো ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের হয় $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ যেখানে P এবং Q হলো ধ্রুবক বা কেবলমাত্র x এর অপেক্ষক, তাকেই বলা হয় প্রথম মাত্রার সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমাকরণ। এর সমাধান করা যায় সমাকলন উৎপাদকের (Integrating factor) সাহায্যে যা হোলো $y(t) = \int(Q \times IF)dx + c$ যেখানে IF হোলো সমাকলন উৎপাদক $_e \int pdx$.

আবার অপর এক ধরণের প্রথম মাত্রার সরলরৈখিক সমীকরণ হোলো $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$ যেখানে P_1 ও Q_1 হোলো ধ্রুবক বা কেবলমাত্র y এর অপেক্ষক। এই ধরণের সমীকরণের সমাধান হোলো $(IF) = (Q_1 \times IF)dy + c$ যেখানে $IF = e^{\int P, dy}$

উদাহরণ ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log y = \log x + \log c \Rightarrow y = cx$$

উদাহরণ ২ ঃ প্রদত্ত ঃ $\frac{dy}{dx} = ye^x$ এবং $x = 0, y = 0.$

y এর মান নির্ণয় করো যখন $x = 1.$

সমাধান ঃ $\frac{dy}{dx} = ye^x \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \int e^x d^x$

$$\Rightarrow \log y = e^x + c$$

$x = 0$ ও $y = e$ বসিয়ে পাই $\log e = e^0 + c \Rightarrow C = 0 \because \log e = 1$

$\therefore \log y = e^x$

$x = 1$ প্রতিস্থাপন করে পাই ঃ $\log y = e \Rightarrow y = e^e$

উদাহরণ ৩ ঃ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটি সমাধান করো।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ, যার ধরণ হোলো $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ সমাকলন উৎপাদক ঃ $\int \frac{1}{x}dx = e^{\log x} = x$

সুতরাং সমাধান $y.x = \int x.x^2 dx$

অথবা $yx = \frac{x^2}{4} + c$

অর্থাৎ $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

উদাহরণ ৪ ঃ মূলবিন্দু থেকে উদ্গাতা রেখাসমূহের ডিভারেন্সিয়াল সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধার যাক $y = mx$ হোলো মূলবিন্দু থেকে উদ্ভূত রেখাসমূহের সমীকরণ। সুতরাং $\frac{dy}{dx} = m$

অর্থাৎ $y = \frac{dy}{dx}$ বা $x.\frac{dy}{dx} - y = 0$

উদাহরণ ৬ ঃ একটি তলের উপর অবস্থিত সকল রেখা যেগুলো অনূভূমিক নয় (non horzontal lines) তার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ একটি তলের উপরস্থিতি সকল রেখা যেগুলো অনুভূমিক নয় তার সমীকরণ হোলো ঃ $ax + by = c$ যেখানে $a \neq 0$

$\therefore a\frac{dx}{dy} + b = 0$

উভয়পক্ষ y এর সাপেক্ষে অবকলম করে পাই ঃ

$a\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ বা $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$

1.5 সমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের বিশদ সমাধান পদ্ধতি

সমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের আকার হোলো ঃ $\frac{dx}{dt} + ay = 0$

যেখানে a হোলো একটি ধ্রুবক।

অর্থাৎ ঃ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a$

এর সাধারণ সমাধান হোলো ঃ $y(t) = Ae^{-at}$

নির্দিষ্ট সমাধান ঃ $y(t) = y(o)e^{-at}$

সাধারণ সমাধানে যখন A র কোনো বিশেষ মান প্রতিস্থাপন করা হয়, তখন তাকে বিশেষ সমাধান (parti cular solution)। তাহলে A র এক একটি মানের জন্য এক একটি বিশেষ সমাধান পাওয়া যাবে এবং এইভাবে অসীম সংখ্যক বিশেষ সমাধান পাওয়া যাবে। এমনটি A যখন y(o) মান গ্রহণ করে তখনও বিশেষ সমাধান পাওয়া যাবে। y(o) সেক্ষেত্রে এমন একটি মান যার জন্য সমাধানটিড প্রাথমিক শর্ত (Initial condition) পালন করে।

এই ধরণের সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে দুটি বিষয় লক্ষণীয় ঃ

১। প্রাপ্ত সমাধান কোনো গাণিতিক মান নয় (numerical value); বরং y(t) অপেক্ষক। এটি একটি সময় পথ (time path), যেখানে t নির্দেশ করে সময়।

২। y(t) এর সমাধানে কোনো অবকল থাকবে না। অর্থাৎ যদি t এর নির্দিষ্ট মান বসানো হয় তাহলে তার সাপেক্ষে *y* এর মানও নির্ণয় করা সম্ভব।

1. অসমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের বিশদ সমাধান পদ্ধতি ঃ (Non homogeneous case)

অসমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের আকার হোলো $\frac{dy}{dt} + ay = b.$

এক্ষেত্রে সমীকরণের সমাধানের দুটি ভাগ ঃ

(১)পরিপূরক অপেক্ষা (complementary function) y_c ও (২) বিশেষ সমাকল (Particular integral). y_p.

সাধারণ সমাধান হলো $y(t) = y_c + y_p$. পরিপূরক অপেক্ষকের জন্য অসমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটির সংকুচিত সমজাতীয় রূপ নেওয়া হয় (reduced version)। $y_c = Ae^{-at}$ হোলো পরিপূরক অপেক্ষক।

বিশেষ সমাকল (Particular Integral) হিসাবে y = K নেওয়া হয়। তাহলে $\frac{dy}{dt} = 0$ এবং ay =b হয়। সুতরাং $y = \frac{b}{a}$

সাধারণ সমাধান $y(t) = y_c k + y_p$

$$= Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

(যেখানে $a \neq 0$)

যদি $t = 0$ হয় তাহলে ধরা যাক $y = y(0)$।

$\therefore\ y(0) = A + \frac{b}{a} \Rightarrow \lambda = y(0) - \frac{b}{a}$ সুতরাং $y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}$ হলো নির্দিষ্ট সমাধান (definite solution)

নিম্নের উদাহরণের মাধ্যমে এই সমাধান পদ্ধতি বোঝানো হলো ঃ

উদাহরণ ১। প্রদত্ত ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

সমাধান করো ঃ $\frac{dy}{dt} + 5y = 15$; $y(0) = 1$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমস্যাটি প্রথম মাত্রার সরলরৈখিক অসমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সংক্রান্ত।

সাধারণ সমাধান ঃ $y(t) = y_c + y_p$ পরিপূরক অপেক্ষকের জন্য সমীকরণটির সংকুচিত আকার বিবেচনা করা হলো। অর্থাৎ সংকুচিত সমজাতীয় সমীকরণ হোলো (reduced homogeneous form) ঃ

$$\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

যদি একটি পরীক্ষা সংক্রান্ত y এর সমাধান বিবেচনা করা যায় (trial soulution)

$$y = Ae^{rt} \neq 0$$

$$\therefore\ Are^{rt} + 5Ae^{rt} = 0$$

বা $Ae^{rt}[r + 5] = 0$

যেহেতু $Ae^{rt} \neq 0\ \therefore r + 5 = 0 \Rightarrow r = -5$

তাহলে পরিপূরক সমাধান ঃ $y_c = \lambda_e^{-5t}$

বিশেষ সমাধানের জন্য ধরা যাক $y = K$. যেখানে K একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ \frac{dy}{dt} = 0$ বা $5y = 15$ এবং $y = 3$.

$y_p = 3$. সাধারণ সমাধান ঃ $y(t) = y_c + y_p$.

যদি $y(0) = 1$ হয় তাহলে $y(t) = Ae^{-5t} + 3$ এর ক্ষেত্রে $y(0) = 1 = Ae^{0} + 3$.

অর্থাৎ $A = 1 - 3 = -2$.

সুতরাং $y(t) = -2e^{-5t} + 3$. হোলো প্রদত্ত সমস্যাটির নির্দিষ্ট সমাধান।

অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে প্রথম মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের প্রয়োগ দেখানো হলো নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণের মাধ্যমে।

উদাহরণ ২। একটি পূর্ণ প্রতিযোগীতামূলক ফাম তার উৎপাদন পরিবর্তন করার জন্য সময় নেয়। ধরা যাক ফার্মটি তার উৎপাদন বিন্যস্ত (adjust) করার জন্য মূল্য এবং প্রান্তিক ব্যয়ের পার্থক্যের উপর নির্ভর করে। ধরা যাক $\dot{q} = \alpha\left[P - MC(q)\right]$ যেখানে q হোলো উৎপাদনের পরিমাণ, p হোলো উৎপাদন মূল্য ও MC(q) হোলো উৎপাদন ব্যয় অপেক্ষক। ধরা যাক $MC(q) = aq(a > 0)$. q(t) এর জন্য ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ সমাধান করো। q এর স্থির অবস্থা (steady state) নির্ধরাণ করো এবং q(t) কোনো স্থির সমাধানে (steady solution) মিলিত হয় কিনা পরীক্ষা করো (q(t) converges to steady solution).

সমাধান ঃ $\dot{q} = \alpha[p - aq]\,;\ a > 0$

$\dot{q} + \alpha aq = \alpha p;$ এটি একটি সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ যেখানে স্থির সহ (constant coefficient) এবং ধ্রবক পদ (constant terms) থাকে।

সমজাতীয় আকারঃ $\dot{q} + \alpha aq = 0$

$$q_c = Ce^{-\alpha at}$$

স্থির অবস্থা জনিত সমাধান হোলো $q = 0$ যখন

$$q = \overline{q}$$

$$\therefore\ \alpha a\overline{q} = \alpha p\ \ \therefore\ \overline{q} = \frac{p}{a}$$

সাধারণ সমাধান ঃ $q(t) = q_c + q_p$

$$= ce^{-\alpha at} + \frac{P}{a}$$

$$q(0) = q_0 = C + \frac{p}{a}\ \therefore\ C = q_0 - \frac{p}{a}$$

$$q(t) = \left(q_0 - \frac{p}{a}\right)c^{-\alpha at} + \frac{p}{a}$$

যত $t \to \alpha;\ q(t) \to \frac{p}{a}\ \because \alpha > 0,\ a > 0$

উদাহরণ ৩। ধরা যাক চালের চাহিদা হোলো ঃ

$q^D = A + BP$ এবং যোগান হোলো ঃ

$q^s = F + GP + H(1 - e^{-\mu t})$, $\mu > 0$, যেখানে শেষ পদটি সময়ের সাপেক্ষে উৎপাদনশীলতার বৃদ্ধি নির্দেশ করে। ধরা যাক অতিরিক্ত চাহিদা বা যোগানের ভিত্তিতে মূল্য বিনস্ত হয় (adjusts) $\dot{P} = \alpha(q^D - q^s)$ অনুসারে। এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটি সমাধান করো। প্রদত্ত $P(O) = P_o$. P(t) কি কোনো নির্দিষ্ট সীমতে অনুগামী হয়? (Does P(t) converge to finite teait?)

সমাধান ঃ $\dot{P} = \alpha(q^D - q^S)$

বা $\dot{P} = \alpha(A + BP - F - GP - H(I - e^{-\mu t}))$ $\mu > 0$

$\therefore \dot{P} - \alpha(B - G)P = \alpha\left[A - F - H(1 - e^{-\mu t})\right]$

$= \left[\alpha(A - F - H) + \alpha He^{-\mu t}\right]$

ধরা যাক $a = -\alpha(B - G)$

$b = \alpha(A - F - H)$

$\therefore \dot{P} + ap = b + \alpha He^{-\mu t}$ অর্থাৎ এই সমীকরণটি $\left[\dot{y} + ya(t) = b(t)\right]$ আকারের।

সমাকলন উৎপাদক ঃ $IF = e^{at}$.

সমীকরণটির উভয় পক্ষকে IF দিয়ে গুণ করলে ঃ

$(\dot{P} + ap)e^{at} = (b + \alpha He^{-\mu t}).e^{at}$

$\frac{d}{dt}(p.e^{at}) = be^{at} + \alpha He^{(a-\mu)t}$

সমাকলম করে পাই ঃ

$$pe^{at} = \frac{be^{at}}{a} + \frac{\alpha He^{(a-\mu)t}}{a - \mu} + c$$

$$P(t) = \frac{b}{a} + \frac{\alpha He^{-\mu t}}{\alpha - \mu} + ce^{-at}$$

$$P(O) = P_O = \frac{b}{a} + \frac{\alpha H}{a - \mu} + c$$

$$\therefore C = \left(P_O - \frac{b}{a} - \frac{\alpha H}{\alpha - \mu}\right)$$

$$P(t)=\frac{b}{a}+\frac{\alpha H}{\alpha-\mu}e^{-\mu t}+\left(P_O-\frac{b}{a}-\frac{\alpha H}{a\mu}\right)e^{-\mu t}$$

a এবং b প্রতিস্থাপন করে ঃ

$$P(t)=\frac{\alpha(A-F-H)}{-\alpha(B-G)}+\frac{\alpha H}{-(B-G)-\mu}e^{-ut}$$

$$+\left(P_O-\frac{\alpha(A-F-H)}{-\alpha(B-G)}-\frac{\alpha H}{-\alpha(B-G)-\mu}\right)\times e^{\alpha(B-G)t}$$

$$=\frac{(A-F-H)}{G-B}+\frac{H}{G-B-\mu/\alpha}e^{-\mu t}$$

$$+\left[P_O-\frac{A-F-H}{G-B}-\frac{\alpha H}{G-B-\mu/\alpha}\right]e^{-(G-B)t}$$

যখন $t\to\infty$ তখন দ্বিতীয় পদটি 'O' এর দিকে অগ্রসর হয়, ও তৃতীয় পদটি (ডানদিকের) 'O' এর দিকে অগ্রসর হয়, $G-B>0$ যদি হয়

$\therefore$ P(t) ও অগ্রসর হবে $\frac{A-F-H}{G-B}$; $G-B>0$ সামগ্রিকভাবে, যেহেতু যোগান রেখার গতি ধনাত্মক, এবং $B<0$ যেহেতু চাহিদা রেখা ঋণাত্মক ঢাল সম্পন্ন।

1. দ্বিতীয় মাত্রার সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ ঃ (second order linear Differential Equation) ঃ

এই ধরণের ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের দুই দিক থেকে গুরুত্ব লক্ষ্য করা যায়।

(ক) প্রয়োগের দিক যেখানে গতি শুধু নয় তার ত্বরণও (acceleration) গুরুত্বপূর্ণ।

(খ) অসরলরৈখিক সমীকরণকে আন্দাজ (approximate) করার জন্য।

1.6 দ্বিতীয় মাত্রার সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের আকার ঃ

এই ধরণের সমীকরণকে প্রকাশ করার একটি পদ্ধতি হলো ঃ $\frac{d^2y}{dt^2}=A\frac{dy}{dt}+By$ বা $\ddot{y}=A\dot{y}+By$

যদি ধ্রুপদী আঙ্গিকে (classical form) প্রকাশ করা হয় তাহলে ঃ $a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$

বা $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$ ....(i)

উপরোক্ত সমাকরণে যদি a = 0 হয় তাহলে সমীকরণটি প্রথম মাত্রার সরলরৈখিক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণে উপনীত হয়। সেক্ষেত্রে সমাধানের রূপটি হবে $y = e^{rt}$।

এখন যদি (1) এর সাধান আলোচনা করা করা যায় তাহলে $y = e^{rt}$, $\dot{y} = re^{rt}$ এবং $\ddot{y} = r^2e^{rt}$ বসানো হবে (1) নং সমীকরণে। সুতরাং সমীকরণটি হবে $ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$

$\Rightarrow e^{rt}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$

যেহেতু e^{rt} কখনোই শূন্য হবে না, সুতরাং $y = e^{rt}$ (1) এর একটি সমাধান হয় কেবলমাত্র যদি r; $ar^2 + br + c = 0$ এই সমীকরণটি পালন করে (satisfy) $ar^2 + br + c = 0$ এই সমাকরণটি হোলো একটি দ্বিঘতি সমীকরণ থাকে বলা হয় চরিত্রগতি সমীকরণ (characterestie equation)। এই ধরণের সমীকরণের মূলগুলি (roots) হলো ঃ

দুটি মূলের মানের জন্য তিনটি সম্ভাব্যতা থাকে।

(১) $b^2 - 4ac > 0$ তাহলে $ar^2 + br + c = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান

(২) $b^2 - 4ac = 0$ হলে $a^2 + br + c = 0$ এর মূলদ্বয় সমান।

(৩) $b^2 - 4ac < 0$ হলে $a^2 + br + c = 0$ এর মূলদ্বয় জটিল।

নিম্নের অধ্যায়ে এই তিনটি সম্ভাব্যতার নিরিখে ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের রূপ আলোচনা করা হোলো।

1.6.1 চরিত্রগত সমীকরণের বাস্তব ও অসমান মূল (Real and Unequal Roots of the Characteristic equation) :

মূল দ্বিঘাত সমীকরণটি হোলো $ar^2 + br + c = 0 \cdots (2)$

উপপাদ্য ঃ যদি সমীকরণ প্রদত্ত দ্বিতীয় মাত্রার নং সমীকরণ প্রদত্ত যে চরিত্রগত বহুপদ; (Polynomial) তার r_1ও r_2, এই দুই স্বতন্ত্র (distinct) মূল পাওয়া যায়, তাহলে তার সমীকরণ (1) সাধারণ সমীকরণ হবে

$y(t) = K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$.

প্রমাণ ঃ যেহেতু r_1 ও r_2 (2) নং চরিত্রগত বহুপদের দুটি মূল (roots), সুতরাং $y(t) = K_1e^{r_1t}$ এবং $y(t) = K_2e^{r_2t}$ হোলো (1) নং ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সমাধান। যেহেতু $y_1(t)$ এবং $y_2(t)$ উভয়েই এর সমাধান সুতরাং তাদের সমষ্টি $y_1(t) + y_2(t)$ ও (2) এর সমাধান কারণ ঃ

$$a(y_1 + y_2)^{\cdot\cdot} + b(y_1 + y_2) + c(y_1 + y_2)$$

$$= \frac{ad^2(y_1 + y_2)}{dt^2} + \frac{bd(y_1 + y_2)}{dt} + c(y_1 + y_2)$$

$$= a(\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + cy_1) + (\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + cy_2)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\therefore y(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$ ...(3) হলো (1) নং প্রদত্ত ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সমাধান। এখন যদি দেখানো যায় যে প্রদত্ত যে কোনো প্রাথমিক মান সংক্রান্ত সমস্যায় (Initial value problem); $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$; $y(t_0) = y_0$ ও $\dot{y}(t_0) = z_0$;...(4) র ক্ষেত্রে K_1* ও K_2* এমন দুটি ধ্রুবক পাওয়া যাবে যাতে $y(t) = K_1 * e_1^{r_1 t} + K_2 * e_e^{r_2 t}$ হবে (4) এর সমাধান; তবে (3) নং সমীকরণটি সাধারণ সমাধান হিসাবে গণ্য করা যাবে।

ধরা যাক $t_0 = 0$ এবং এই মান (4) নং সমীকরণে বসিয়ে; (3) নং সমীকরণের সমাধান হিসাবে পাওয়া গেলো ঃ

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= K_1 e_1^{r_1 \cdot 0} + K_2 e_2^{r_2 \cdot 0} = K_1 + K_2 = y_0 \\ \text{এবং } y_2(0) &= r_1 K_1 e_1^{r_1 \cdot 0} + r_2 K_2 e_2^{r_2 \cdot 0} = r_1 K_1 + r_2 K_2 = x_0 \end{aligned}\right\} 5$$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সের আকারে প্রকাশ করলে ঃ (অধ্যায় আলোচিত)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

যেহেতু $r_1 \neq r_2$ সুতরাং সহগ ম্যাট্রিক্সটি নন সিঙ্গুলার (Non singular)। অর্থাৎ প্রদত্ত যে কোনো প্রাথমিক মান y_0 এবং Z_0, সমীকরণ (3) এর সাপেক্ষে, যদি নেওয়া হয়, তাহলে উপরোক্ত (5) নং দ্বারা যে সমীকরণ সঙ্গা (systems of equations) দেখানো হয়েছে, তার থেকে K_1 ও K_2 র স্বতন্ত্র মান (unique solution) পাওয়া যাবে। তাহলে (3) কে (1) নং সমীকরণের সাধারণ সমাধান (general solution) বলা যাবে।

উদাহরণ ১। নিম্নলিখিত প্রাথমিক মান সংক্রান্ত সমস্যাগুলি সমাধান করো। (solve the following initial value probelms)

(ক) $\ddot{y} - \overline{y} = 0,\ y(0) = \dot{y}(0) = 1$

(খ) $2\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = 0;\ y(0) = 3,\ \dot{y}(0) = -1$

সমাধান (ক) $\ddot{y} - y = 0$

$\therefore r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$

$r = \pm 1$

তাহলে $y = K_1 e^t + K_2 e^{-t}$

$\ddot{y} = K_1 e^t - K_2 e^{-t}$

এখন $1 = y(0) = K_1 + K_2$

আর $1 = \ddot{y}(0) = K_1 - K_2$

সুতরাং উভয় সমাকরণ পারস্পরিক সমাধান করে পাই ঃ $K_1 = 1,\ K_2 = 0$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $y = e^t$

(খ) $2\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = 0$

$\therefore\ 2r^2 + 3r - 2 = (2r-1)(r+2) = 0\ \therefore\ r_1 = \frac{1}{2}\ r_2 = -2$

$\therefore\ y = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-2t}$

$\dot{y} = 0.5c_1 e^{t/2} - 2c_2 e^{-2t}$

এখন $3 = y(0) = c_1 + c_2$

$-1 = \dot{y}(0) = 0.5c_1 - 2c_2$

উভয় সমীকরণ সমাধান করে পাই $c_1 = 2, c_2 = 1\ \therefore y = 2e^{t/2} + e^{-2t}$

1.6.2 চরিত্রগত সমীকরণের জটিল মূল (Complex Roots of the Characteristic Equation)

উপপাদ্য ২। সমীকরণ (1) প্রদত্ত সরলরৈখিক দ্বিতীয় মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের চরিত্রগত বহুপদ (Characteristic polynomial), যা সমীকরণ (2) এর মাধ্যমে প্রচালিত, তার যদি মূলদ্বয় সমান হয়, অর্থাৎ $r_1 = r_2$ হয়, যেখানে $y(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 t e^{r_1 t}$ তাহলে সমীকরণ (1) এর সাধারণ সমাধান হবে $y(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_1 t}$

প্রমাণ ঃ সমীকরণ (1) এর চরিত্রগত বহুপদে যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয় তাহেল (2) এর কেবলমাত্র একটি স্বতন্ত্র মূল, r_1 থাকবে। এবার যেহেতু $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ সুতরাং $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$

অর্থাৎ একটি সমাধান হোলো $y_1(t) = K_1 e^{r_1 t}$ কিন্তু সাধারণ সমাধানে পৌঁছনোর জন্য আর একটি স্বাধীন সমাধানের (auother independent solution) প্রয়োজন। দ্বিতীয় সমাধান যদি হয় $y_2(t) = K_2 t e^{r_1 t}$ তাহলে $a\ddot{y}_2(t) + b\dot{y}_2(t) + cy_2(t)$

$= a\left(r_1^2 t e^{r_1 t} + 2r_1 e^{r_1 t}\right) + b\left(r_1 t e^{r_1 t} + e^{r_1 t}\right) + cte^{r_1 t}$

$= tr^{r_1 t}\left(ar_1^2 + br_1 + c\right) + e^{r_1 t}(2ar_1 + b)$

$= 0 + 0$

যেহেতু r_1; সমীকরণ (2) প্রদত্ত চরিত্রগতি সমাকরণ পালন করে, এবং $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$

$\therefore\ y(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 t e^{r_1 t}$ হোলো সাধারণ সমাধান।

উদাহরণ ২। নিম্নলিখিত প্রাথমিক মান সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করো।

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0;\ y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 5$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমস্যাটির চরিত্রগত সমীকরণ হোলো ঃ

$r^2 - 4r + 4 = 0,$ এর মূলদ্বয় ঃ $r_1 = r_2 = 2$

সুতরাং সাধারণ সমাধান ঃ $y(t) = K_1e^{2t} + K_2e^{2t}$

যদি প্রাথমিক মান বসানো হয় তহালে ঃ $K_1 + 0 = 2$ ও $2K_1 + K_2 = 5$

উপরিউক্ত সরলরৈখিক সমাকরণদ্বয় পারস্পরিক সমাধান করে ঃ $K_1 = 2, K_2 = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান ঃ $y(t) = 2r^{2t} + te^{2t}$

উপপাদ্য ৩। যদি সরলরৈখিক দ্বিতীয় মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের চরিত্রগত বহুপদের মূলদ্বয় জটিল রাশি $\alpha \pm i\beta$ ধরণের হয়; অর্থাৎ যার শর্ত $b^2 - 4ac < 0;$ তাহলে সমাকরণটির সাধারণ সমাধান হবে $y(t) = e^{\alpha t}(c_1\beta t + c_2 \sin\beta t)$

প্রমাণ ঃ যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয় তাহেল চরিত্রগত সমীকরণটির মূলদ্বয় হবে ঃ

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$$ এবং

$$r_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$$

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে উভয় মূলই হোলো জটিল অনুবন্ধী মূল (complex conjugates).

যদি $\alpha = -\frac{b}{2a}$ এবং $\beta \equiv \sqrt{4ac - b^2}/2a$ হয় তাহলে চরিত্রগত সমীকরণের মূলদ্বয় $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ হয়।

সুতরাং $y(t) = K_1e^{(\alpha+i\beta)t} + K_2e^{(\alpha-i\beta)t}$ ...(4) হলো (1) নং সমীকরণের সমাধান।

এখন সূচকের (exponents) নিয়মানুসারে ঃ

$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t}$ এবং $e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{-i\beta t}$ ...(5)

এখানে $e^{\alpha t}$; এই উৎপাদকটি বাস্তব কিন্তু $e^{\pm i\beta t}$ উৎপাদকে কাল্পনিক সংখ্যা (imagnary number) i আছে। সেক্ষেত্রে অয়লার সূত্রানুসারে (Euler's formula) $e^{i\beta t}$ কে লেখা যায় ঃ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

তাহলে (5) নম্বর সমীকরণ ও অয়লার সূত্র অবলম্বনে (4) প্রদত্ত সমাধানটির রূপ হবে ঃ

$$y(t) = e^{\alpha t}\left[K_1(\cos\beta t + i\sin\beta t) + K_2(\cos\beta t - i\sin\beta t)\right] \ldots(6)$$

প্রাথমিক শর্ত $y(0) = y_0$ ও $\dot{y}(0) = z_0, \therefore\ c_1 = y_0$

$\alpha c_1 + \beta c_2 = z_0\ \therefore\ c_2 = \dfrac{z_0 - \alpha y_0}{\beta}$ হবে সকল y_0 ও z_0 র জন্য

সুতরাং সমীকরণ (6) হোলো যথার্থই একটি সাধারণ সমাধান।

1.7 সাম্যবস্থার গতিশীল স্থিতিশীলতা

স্বতন্ত্র বাস্তব মূল এবং পুনরাবৃত্তিসূচক বাস্তব মূল (Repeated real roots) অর্থাৎ $r = r_1 = r_2$ এর ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থার গতিশীল স্থিতিশীলতা; চরিত্রগতি মূলের বীজগাণিতীয় চিহ্নের উপর নির্ভর করে। প্রথম ক্ষেত্রে পরিপূরক অপেক্ষক $K_1e^{r_1t}$ এবং $K_2e^{r_2t}$, এই দুই সূচকীয় রাশির (exponential expression) সমন্বয়ে গঠিত। সুতরাং প্রাথমিক শর্ত নিরপেভে যদি r_1 ও r_2 উভয়েই ঋণাত্মক হয়; তাহলেই $y_c \to 0$ যখন $t \to \infty$; এই গতিশীল স্থিতিবস্থা পাওয়া যাবে। কিন্তু যদি একটি মূল ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয় তাহলে, ধনাত্মক মূলটিই বলশালী হয়। ধার যাক $r_1 = 4$ $r_2 = -6$। তাহলে t বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে e^{4t} যেহেতু $(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ এবং $(\cos\beta t - i\sin\beta t)$ হোলো জটিল অনুবন্ধী সুতরাং K_1 ও K_2 কে একে অপরের জটিল অনুবন্ধী হিসাবে নির্বাচন করা যাবে, যেমন $K_1 = c_1 + ic_2$ ও $K_2 = c_1 - ic_2$ সুতরাং

$$(c_1 + ic_2)(\cos\beta t + i\sin\beta t) = (c_1\cos\beta t - c_2\sin\beta t) - i(c_2\cos\beta t + c_1\sin\beta t)$$

এবং $(c_1 + ic_2)(\cos\beta t - i\sin\beta t) = (c_1\cos\beta t - c_2\sin\beta t) - i(c_2\cos\beta t + c_1\sin\beta t)$

উভয়ই হোলো একে অপরের জটিল অনুবন্ধী, এখন যেহেতু দুটি জটিল অনুবন্ধীর যোগফল হলো বাস্তব অর্থাৎ $z_1 + iz_2$ ও $z_1 - iz_2$ র যোগফল 2z। সুতরাং উপরোক্ত আলোচিত জটিল অনুবন্ধী দ্বয়ের যোগফল হবে ঃ $2(c_1\cos\beta t - c_2\sin\beta t)$ $e^{\alpha t}$ দিয়ে গুণ করলে পাই ঃ

$$y(t) = e^{\alpha t}(2c_1\cos\beta t - 2c_2\sin\beta t)$$

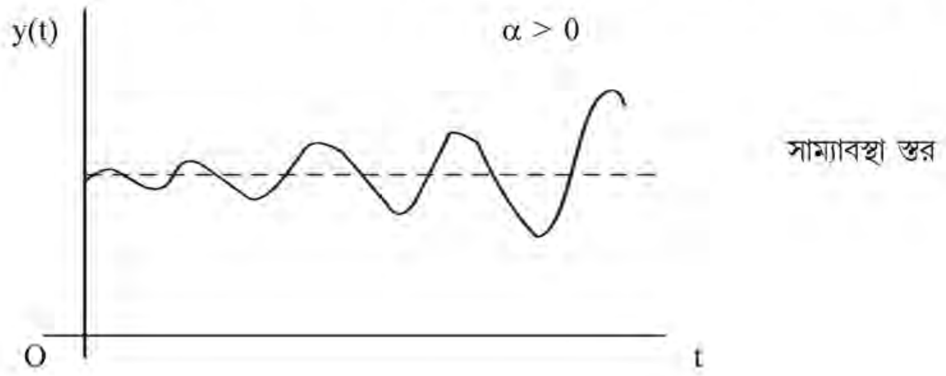
বা $y(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t) \ldots(6)$

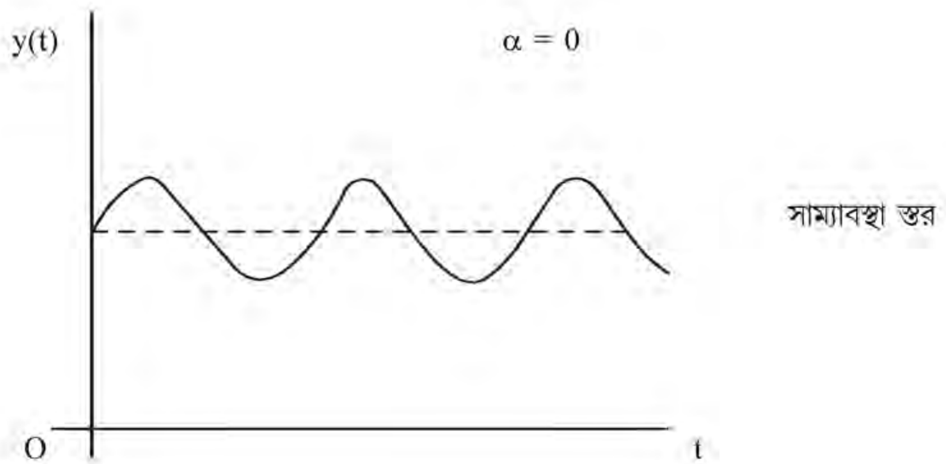
এখন প্রদত্ত y_0 ও z_0 স্কেলারের জন্য (6) এর c_1 ও c_2 র মান পাওয়া যাবে যাতে প্রাথমিক মানসংক্রান্ত সমস্যার সমাধান সম্ভব। যেহেতু $\sin 0 = 0$ ও $\cos 0 = 1$ এবং

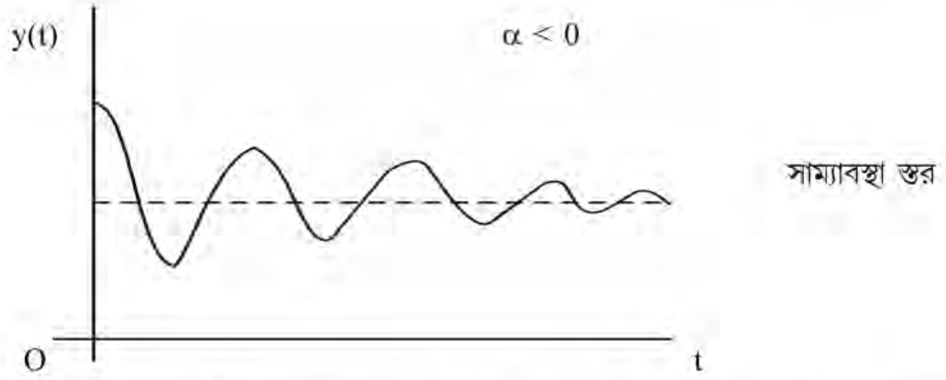
$\dot{y}(t) = e^{\alpha t}\left[(\alpha c_1 + \beta c_2)\cos\beta t + (\alpha c_2 - \beta c_1)\sin\beta t\right]$ বৃদ্ধি পেতে থাকবে ও e^{-6t} হ্রাস পেতে থাকবে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে পরিপূরক অপেক্ষক e^{rt} ও te^{rt}, এই উভয় পদের উপর নির্ভরশীল। প্রথমটির ক্ষেত্রে প্রাথমিক অবস্থা নিরপেক্ষে e^{rt} ; শূণ্যের দিকে অগ্রসর হবে; তার জরুরী ও যথেষ্ট শর্ত হোলো $r < 0$ যখন $t \to \infty$ দ্বিতীয় পদ অর্থাৎ te^{rt} একই প্রকার সময়পথ অনুসরণ করে $(r \neq 0)$ সুতরাং যখন $t \to \infty$; তখন $r < 0$ হোলো গতিময় স্থিতিশীলতার জরুরী ও যথেষ্ট শর্ত।

যখন পরিপূরক অপেক্ষক $y_c = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)$ তখন যদি $\alpha > 0$ হয়, তাহলে $e^{\alpha t}$; t বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে ক্রমাগত বাড়তি থাকে। তাহলে বন্ধনীস্থিত পদের বিস্তারের উপর একগটি বিবর্ধক প্রভাব (Magnifying impact on the amplitude of $(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)$ পড়বে। ফলে প্রত্যেকটি চক্রে দেখা যাবে সাম্যাবস্থা থেকে $y(t)$ এর সময় পথ দূরে সরে যাচ্ছে। একে বলা হয় বিস্ফোরক হ্রাসবৃদ্ধি (explo-







sive fluctuation) যদি h = 0 হয়, তাহলে $e^{\alpha t}$ হয় এবং পরিপূরক অপেক্ষক হবে $c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t$ সেক্ষেত্রে সম্পূর্ণ বিস্তৃতিই (amplitude) ধ্রুবক হবে। (চিত্র ১)

(চিত্র ১) *y(t)* এর সময় পথ

এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি চক্র সামাবস্থা থেকে সমান প্রকৃতির (palter) বা একই প্রকৃতির (uniform pattern) চ্যুতি প্রদর্শন করবে (deviation)। এই ধরণের সময় পথকে বলা হয় সমান হ্রাসবৃদ্ধি (uniform fluctuation)।

যদি $\alpha < 0$ তখন $e^{\alpha t}$ ক্রমাগত হ্রাস পাবে t বৃদ্ধির সঙ্গে এবং পরবর্তী চক্রের বিস্তার পূর্বের চক্র (cycle) গুলির অপেক্ষা ছোট হতে থাকবে। একে বলা হয় হ্রাসপ্রাপ্ত ওঠানামা (damped fluctuation)।

কেবলমাত্র হ্রাসপ্রাপ্ত ওঠানামার ক্ষেত্রেই চক্রগুলি সাম্যাবস্থার দিকে অগ্রসর হবে বা সময়পথটি সাম্যবস্থা অভিসারী (convergent) হবে। অপর দুই ক্ষেত্রে সময়পথ অন্তবর্তী সামাবস্থা (inter temporal equilibrium) থেকে বিমুখী (divergent) হতে থাকে.

1.8 বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ ১। $y''(t) + y''(t) - 2y = -10$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো। যদি প্রাথমিক অবস্থা $y(O) = 12,\ y^{1}(O) = -2$ হয় তাহলে নির্দিষ্ট সমাধান কি হবে।

এই অন্তবর্তী সামাবস্থা (intertemp oral equilibruim) কি গতিশীলভাবে স্থিতিশীল ? (dynamically slable)

সমাধান ঃ প্রদত্ত ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটি একটি দ্বিতীয় মাত্রার সরলরৈখিক অসমজাতীয় ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ (second order linear non-homogeneous differential equation)

সাধারণ সমাধান $y(t) = y_c + y_p$ যেখানে y_c হোলো পরিপূরক সমাধান ও y_p হোলো বিশেষ সমাধান।

পরিপূরক সমাধানের জন্য সমীকরণটিকে সমজাতীয় হিসাবে প্রকাশ করা হয়, যাকে বলা হয় হ্রাসপ্রাপ্ত সমীকরণ (reduced from)

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

ধরা যাক পরীক্ষা সমাধান (trial solution) হলো $y = Ae^{rt} \neq 0.$

$$y'(t) = rAe^{rt} \quad y''(t) = r^2Ae^{rt}$$

প্রতিস্থাপন করে ঃ

$$r^2Ae^{rt} + rAe^{rt} - 2Ae^{rt} = 0$$

অথবা $Ae^{rt}(r^2 + r - 2) = 0$

$(r+2)(r-1) = 0 \;\; \therefore Ae^{rt} \neq 0$

$\therefore r = -2$ ও $r = 1$

সুতরাং $y_c = A_1e^{-2t} + A_2e^t$

বিশেষ সমাধানের জন্য ধরি $y = K$ (ধ্রুবক)

$\therefore \; y' = y'' = 0$

$\therefore \; -2K = -10$ বা $K = 5$

অতএব সাধারণ সমাধান ঃ $y(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^t + 5$

এখন $y(0) = 12 \;\; \therefore \; A_1 + A_2 = 7 \ldots(I)$

$y'(O) = -2$

$\therefore \; y'(t) = -2A_1e^{-2t} + A_2e^t$

$\therefore \; y'(O) = -2A_1 + A_2 = -2 \ldots(II)$

(I) ও (II) সমাধান করে ঃ $A_1 = 3$

$A_2 = 4$

তাহলে নির্দিষ্ট সমাধান হলো ঃ

$$y(t) = 3e^{-2t} + 4e^t + 5$$

অন্তবর্তী সামাবস্থা গতিশীল ভাবে স্থিতিশীল (dynamically stable) হবে যদি $y_c \to 0$ হয় যখন $t \to \infty$ হবে এবং এই অবস্থায় উপণীত হবে কেবলমাত্র যদি প্রাথমিক অবস্থা নিরপেক্ষে উভয় মূলই ঋণাত্মক হয়।

এখানে $r_1 = -2, \; r_2 = 1$ এবং ধনাত্মক মূল ঘটনাচক্রে অধিক বলশালী হবে সুতরাং অন্তর্বর্তী সাম্যাবস্থার (inter temporal equilibrium) গতিময় স্থিতিশীলতা নেই।

উদাহরণ ২। প্রদত্ত মূল্য সমন্বয় মডেলটিতে (price adjustment model) দামকে সময়ের অপেক্ষক হিসাবে সমাধান করো। এক্ষেত্রে ধরা যাক দাম $\dot{p} = \alpha\left(q^D - q^S\right)$ এই চাহিদা ও যোগানের পার্থক্য হিসাবে সমন্বিত হয় (adjusts) যেখানে $q^D = A + Bp,\ A > 0, B < 0$ এবং $q^S = GP + mK,\ G > 0, m > 0.$ K হোলো কোনো শিল্পে নিয়োজিত মূলধনের পরিমাণ। ধরা যাক কোনো ফার্মের উৎপন্ন লাভ (economic profit) বা লোকসানের পরিপ্রেক্ষিতে মূলধন সমন্বিত হয় $\dot{K} = \gamma(p - \overline{c})$ অনুসারে যেখানে $\overline{c} > 0$ হোলো গড় উৎপাদন ব্যায় ও $\gamma > 0$ হোলো সমন্বয়ের গতি (speed of adjustment) নির্দেশক প্যারামিটার। এক্ষেত্রে দামের সময়পথও বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ $\dot{p} = \alpha\left(q^D - q^S\right)$

$= \alpha(A + BP - GP - mK)$

$\therefore\ \ddot{p} = \alpha\left(B\dot{p} - G\dot{p} - m\dot{K}\right)$

$= \alpha(B - G)\dot{p} - \alpha m\dot{K}$

কিন্তু $\dot{K} = \gamma(p - \overline{c});\ \ \overline{c} > 0$

$\therefore\ \ddot{p} = \alpha(B - G)\dot{p} - \alpha m\gamma(p - \overline{c})$

$\therefore\ \ddot{p} = \alpha(B - G)\dot{p} - \alpha m\gamma p = \alpha m\gamma\overline{c}$

এটি একটি দ্বিতীয় মাত্রার ডিভারেন্সিয়াল সমীকরণ যাতে ধ্রুবক সহগ (constant coefficient) ধ্রুবক পদ (constant term) আছে। ($\ddot{p} = p''$; $\dot{p} = p'$ ও লেখা যাবে)

উপরিউক্ত ডিভারেন্সিয়াল সমীকরণটিকে সমজাতীয় করে (homogenizing) লেখা যাবে

$\ddot{p} - \alpha(B - G)\dot{p} + \alpha m\gamma p = 0$

ধরা যাক $p(t) = Ae^{rt}$

$\therefore\ p(t) = Ae^{rt}$ ও $\ddot{p} = r^2 Ae^{rt}$

$\therefore\ \ddot{p} - \alpha(B - G)\dot{p} + \alpha m\gamma p = 0$

$\therefore\ \left(r^2 - \alpha(B - G)r + \alpha m\gamma\right)Ae^{rt} = 0$

$Ae^{rt} \neq 0 \Rightarrow r^2 - \alpha(B - G)\gamma + \alpha m\gamma = 0$

এটি একটি চরিত্রগত সমাকরণ (characteristic equation)

সুতরাং চরিত্রগত মূলদ্বয় (Characteristic roots) ঃ

$$r_1, r_2 = \frac{\alpha(B-G)}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2(B-G)^2 - 4\alpha m\gamma}}{2}$$

ধরা যাক মূলদ্বয় স্বতন্ত্র (distinct) তাহলে সমজাতীয় সমাধান ঃ

$p_c = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \Rightarrow$ পরিপূরক সমাধান

বিশেষ সমাধান ঃ $\ddot{p} = p = 0$

$$\ddot{p} - \alpha(B-G)\ddot{p} + \alpha m\gamma p = \alpha m\gamma \overline{c}$$

বা $\alpha m\gamma \overline{p} = \alpha m\gamma \overline{c}$

$\therefore \overline{p} = \overline{c}$ হোলো অন্তর্বর্তী সামাবস্থা

অতএব সাধারণ সমাধান ঃ

$$p(t) = p_c + \overline{p}$$

$$= A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

যেখানে (1) এ r_1, r_2 র মান প্রদত্ত আছে। যতক্ষণ $B < 0$ অর্থাৎ চাহিদা রেখা ঋণাত্মক ঢাল সম্পন্ন থাকবে, যোগান রেখা ধনাত্মক ঢাল সম্পন্ন হবে বা $G < 0$ এবং a, m, g > 0 ধ্রুবক হবে ততক্ষণ r_1, r_2 কখনই ঋনাত্মক হতে পারবোন। যদি মূলদ্বয় বাস্তব মান সম্পন্ন হয়, তাহলে এক্ষেত্রে সময় পথ অন্তর্বতী সাম্যাবস্থা $\underline{c}$ অভিসারী হবে।

যদি মূলদ্বয় জটিল হয় অর্থাৎ

$\alpha^2(B-G)^2 - 4m\alpha\gamma < 0$ তখন

$$p(t) = e^{rt}(K_1 \cos\theta t + K_2 \cos\nu t) + \overline{c}$$

যেখানে $h = \dfrac{\alpha(B-G)}{2}$

$\theta = \sqrt{\dfrac{4\alpha m\gamma - \alpha^2(B-G)^2}{2}} \quad \because h < 0,$ সময়

পথ $\underline{c}$ অভিসারী হবে (B < 0, G > 0)

মূলদ্বয় বাস্তব বা জটিল যাই হোক না কেন, দাম সবসময়েই স্থিতিশীল মান অভিসারী হবে। বাস্তব মলূদ্বয়ের ক্ষেত্রে এই সময়পথ $\underline{c}$ এর দিকে একঘেয়ে অভিসারী হবে (monotonic convergence) এবং

জটিল মূলদ্বয় হলে হ্রাসপ্রাপ্ত ওঠানামা বা আন্দোলন (damped fluctuation or damped oscillation) হবে।

1.9 বেকারত্ব ও মুদ্রাস্ফীতির ঘাত-প্রতিঘাত

বেকারত্ব ও মুদ্রাস্ফীতির সম্পর্কিত মডেল দ্বিতীয় মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের মাধ্যমে সমাধান করা যায়।

1.9.1 ফিলিপ সম্পর্ক (The Phillip Relation)

আর্থিক মজুরীর (Money wage) বৃদ্ধির হার এবং বেকারত্ব হারের মধ্যে বিদ্যমান ঋণাত্মক সম্পর্ক হোলো ফিলিপ সম্পর্ক।

$$w = f(U) \quad f'(U) < 0$$

এখানে w হোলো আর্থিক মজুরী বৃদ্ধির হার অর্থাৎ $w = \dot{w}/w$ এবং U হোলো বেকারত্বর হার। পরবর্তী কালে ফিলিপ সম্পর্ককে মুদ্রাস্ফিতী হার ও বেকারত্ব হারের সঙ্গে সম্পর্কীত করা হয়। এটির কারণ হোলো ধনাত্মক w অর্থাৎ আর্থিক মজুরী জণিত ব্যয় (Money wage cost) যখন বাড়ে তখন মুদ্রাস্ফিতীর উপর প্রভাব পড়ে। এই প্রভাব শ্রমের উৎপাদনশীলতা, T, যা বাইরে থেকে প্রদত্ত বা এক্সোজেনাস (Exogeneous), তার দ্বারা কিছুটা প্রশমিত হয়। যদি মুদ্রাস্ফিতীর হাবকে p লেখা হয়, $p = \frac{p'}{p}$ বা মূলবৃদ্ধির হার। সুতরাং $p = w - t$.

যদি f(U) সরলরৈখিক অপেক্ষক হয় বা $f(U) = \alpha - \beta U$ হয $(\alpha, \beta > 0)$ $(\alpha, \beta > 0)$

1.9.2 প্রত্যাশা বর্ধক ফিলিপ সম্পর্ক (The Expectation Augmented Phillips Relation)

প্রত্যাশা বর্ধক ফিলিপ সম্পর্কের রূপ হোলো ঃ

$$w = f(U)g\pi \quad (0 < g \leq 1) \ldots(2)$$

এখানে হোলো প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফিতির হার (expected rate of inflation)। যদি মুদ্রাস্ফিতী দীর্ঘকাল ধরে চলতে থাকে তখন সকলের মধ্যে মুদ্রাস্ফিতী সম্পর্কে একটি প্রত্যাশা সৃষ্টি হয় যার প্রতিফলনে তারা বেশী মজুরী চায়। সেইজন্য w কে π এর বর্ধমান অপেক্ষক (increasing function) হিসাবে ধরা হয়। সেক্ষেত্রে $p = \alpha - T - \beta U$ হবে $p = \alpha - T - \beta U + g\pi \quad (0 < g \leq 1) \ldots(I)$

যদি মুদ্রাস্ফীতির হার অভিযোজিত প্রত্যাশা (adaptive expectation) অনুসারে গঠিত হয় তাহলে $\frac{d\pi}{dt} = i(p - \pi) \quad (0 < j \leq 1) \ldots(II)$ এই সমীকরণটি থেকে প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফীতির হার সময়ের সাপেক্ষে

কিভাবে পরিবতর্তিত হয় তা ধারণা কার যাবে। যদি যথার্থ (actual) মুদ্রাস্ফীতির হার p, প্রত্যাশিত হার π অপেক্ষা বেশী হয়, তাহলে π এর উর্ধ্বমুখী সংশোধন (revised upward) হবে বা $\frac{d\pi}{dt} > 0$ আবার যদি $p < \pi$ হয় তাহলে π এর নিম্নমুখী সংশোধন (revised downward) হবে।

(1) এবং (II) মিলে যে সম্পূর্ণ মডেল তৈরী হলো তাতে দুটি সমীকরণ কিন্তু π, p, ও U তিনটি চলক দেখা যাচ্ছে। সুতরাং π এ p কে এণ্ডোজিনাস ও U কে এক্সোজেনাস হিসাবে ধারণা করলে মডেলের সমাধান করা সম্ভব।

এখন আর্থিক নীতির (monetary policy) ব্যবহারে যদি বেকারত্বের ক্ষেত্রে মুদ্রাস্ফীতির প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা যায়, তাহলে ধরা যাক নমিন্যাল মানি ব্যালান্সের (nominal Money balance) বৃদ্ধির হার $m = \frac{\dot{M}}{M}$ যেখানে M হোলো নমিন্যাল মানি ব্যালান্স। ধরা যাক $\frac{dv}{dt} = -K(m-p);\ K > 0$...(3)

$(m-p)$ হোলো প্রকৃতি অর্থের (real money balance) বৃদ্ধির হার। $m - p = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P} \quad = r_M - r_P$

$= r_{\left(\frac{M}{P}\right)}$ সমীকরণ (3) থেকে বোঝা যায় $\frac{dv}{dt}$ ও প্রকৃতি অর্থের বৃদ্ধির হার ঋণাত্মক সম্পর্কযুক্ত। যেহেতু মডেলে p চালক, $\frac{dv}{dt}$ নির্ধরণে ভুমিকা গ্রহণ করছে সুতরাং এই মডেল বেকারীত্বর ক্ষেত্রে মুদ্রাস্ফীতির প্রতিক্রিয়া নির্ধারণ করতে সক্ষম হবে।

1.9.3 π এর সময় পথ (the Time Path of π)

পূর্ববতী আলোচনা থেকে সমীকরণ (I), (II), (III) এর সমন্বয়ে যে বদ্ধ মডেল পাওয়া গেল তাতে π, p ও U-এই তিনটি চলক আছে। এই তিনটি চলকের যে কোনো দুটি চলকের অপসারনে একটি একক চলরাশি বিশিষ্ট একক ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ (single differential equation in a single variable) গঠন করা সম্ভব।

যদি (I) কে (II) এ প্রতিস্থাপন করা হয় তাহলে

$$\frac{d\pi}{dt} = j(\alpha - T - \beta U) - j(1-g)\pi \ ...(4)$$

$$\therefore \frac{d^2\pi}{dt^2} = j\beta\frac{dU}{dt} - j(1-g))\frac{d\pi}{dt} \ ...(5)$$

(3) কে (5) এ প্রতিস্থাপন করলে ঃ

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = j\beta Km - j\beta Kp - j(1-g)\frac{d\pi}{dt} \;...(6)$$

সমীকরণ (2) থেকে পাওয়া যায় ঃ

$$p = \frac{1}{j}\frac{d\pi}{dt} + \pi \;...(7)$$

$$\therefore \frac{d^2\pi}{dt^2} + \left[\beta K + j(1-g)\right]\frac{d\pi}{dt} + (j\beta K)\pi = j\beta Km \;....(7)$$

বা $\frac{d^2\pi}{dt^2} + a_1\frac{d\pi}{dt} + a_2\pi = b \;....(7^1)$

যেখানে $a_1 = \beta K + j(1-g)$

$a_2 = j\beta K$

$b = j\beta Km$

বিশেষ সমাকল ঃ $\pi_p = \frac{b}{a_2} = m$

অর্থাৎ প্রত্যাশিত মুদ্রাস্ফীতি হারের অন্তর্বর্তী সাম্যবস্থার মান নির্ভর করে নমিন্যাল অর্থের (nominal money) বৃদ্ধির হারের উপর পরিপূরক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দুটি মূল হবে ঃ

$$r_1, r_2 = \frac{1}{2}\left(-a, \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) \;....(8)$$

যেখানে a_1, a_2 উভয়ই ধনাত্মক। এক্ষেত্রে যেহেতু আগে থেকে $a_1^2 \gtrless 4a_2$ কিনা নির্ধারণ করা যাচ্ছে না তাই চরিত্রগত মূল (characteristic roots) বাস্তব, পুনরাবৃত্তিমূলক বা জটিল তিন ধরণই হতে পারে।

যদি $a_1^2 > 4a_2$ হয় (8) এর বন্ধনীস্থিত বর্গমূলটি বাস্তব সংখ্যা (real number) হবে। যেহেতু a_2 ধনাত্মক, সুতরাং $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < \sqrt{a_1^2} = a_1$ এখন r_1 ঋণাত্মক ও r_2 ঋণাত্মক হলে চলমান স্থিতিবস্থা (dynamically stable equilibriuan) হবে।

যদি $a_1^2 > 4a_2$ হয়, তাহলে (8) এর বন্ধনীস্থিত বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = 0$ হবে। সুতরাং $r_1 = r_2 = -a_{1/2} < 0.$ যেহেতু r_1 ও r_2 উভয়ই ঋণাত্মক সুতরাং পুনরাবৃত্তিমূলক মূলের ক্ষেত্রেও চলমান স্থায়িত্ব লক্ষ্য করা যাবে। এবার জটিল মূলের ক্ষেত্রে বাস্তব অংশ $h = -a_{1/2}$. এক্ষেত্রেও চলমান স্থায়িত্ব হবে।

সুতরাং (8) এর সকল অবস্থায় চলমান স্থায়িত্ব অবস্থান সরবে।

উদাহরণ ১। তিনটি চলরাশিবিশিষ্ট একটি মডেলের নিম্নলিখিত রূপ নেওয়া হোলো ঃ

$$p = \frac{1}{6} - 3U + \frac{\pi}{3} \;....(1)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{3}{4}(p - \pi) \;....(2)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{1}{2}(m - p)$$

(a) p(t), p(t) ও U(t) নির্ণয় করো।

(b) p এর সময় পথ আলোচনা করো।

(c) p এবং U এর অন্তর্বর্তী সাম্যাবস্থার মান কি হবে?

(d) $\bar{U}$ কি $\bar{p}$ এর সঙ্গে সম্পর্কিত? যদি এই দুই সাম্যবস্থার মান সংযুক্ত হয় দীর্ঘকালীন ফিলিপ রেখায় তাহলে কি উল্লম্ব আকৃতির ফিল্পি রেখা একখনও পাওয়া যাবে?

সমাধান ঃ এখানে প্যারা মিটারগুলির মান $\beta = 3,\; g = \frac{1}{3},\; j = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{2}$

সুতরাং ( ) অনুসারে ও $a_1 = 2,\; a_2 = \frac{9}{8}$ ও $b = \frac{9}{8}m.$

বিশেষ সমাধান হোলো $\frac{b}{a_2} = m.$ চরিত্রগত মূলত জটিল যেখানে $h = -1$ ও $\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{4}.$ সুতরাং π এর সাধারণ সমাধান ঃ

$$\pi(t) = e^{-t}\left(A_5 \cos\frac{\sqrt{2}}{4}t + A_6 \sin\frac{\sqrt{2}}{4}t\right) + m.$$

সমীকরণ (2) এ প্রতিস্থাপন করলে এবং p সমাধান করলে

$$p(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\left\{\left(\sqrt{2}A_6 - A_5\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{4}t \;-\left(\sqrt{2}A_5 + A_6\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{4}t\right\} + m$$

এবং $U(t) = \frac{1}{9}\pi - \frac{1}{3}p + \frac{1}{18}$

সুতরাং $U(t)=\frac{1}{9}e^{-t}\left\{\left(2A_5-\sqrt{2}A_6\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{4}t\_\left(\sqrt{2}A_5+2A_6\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{4}t\right\}+\frac{1}{18}-\frac{2}{9}m.$

(b) হ্যাঁ, হ্যাঁ

(c) $\overline{p}=m,\ \ \overline{U}=\frac{1}{18}-\frac{2}{9}m$

(d) এখন $\overline{U}$; $\overline{p}$ এর সঙ্গে সম্পর্কিত, ফিলিপ রেখা কোনোভাবেই উল্লম্ব নয় কিন্তু ঋণাত্মক চালযুক্ত। দীর্ঘকালীন উল্লম্ব ফিল্পি রেখার জন্য $g = 1$ এই স্বতঃসিদ্ধ জরুরী।

1.10 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়ে ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের ব্যাখ্যা ও গঠন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে তার সমাধান পদ্ধতি দেখানো হয়েছে। অর্থনৈতিক মডেল সমাধানের ক্ষেত্রে এর প্রয়োগ দেখানো হয়েছে।

1.11 প্রশ্নাবলী

1. নিচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণ মান 2.

(a) $\frac{dy}{dt}+4y=12$ এই সমীকরণের সাধারণ সমাধানে কি হবে?

(b) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4-5t^5=0$ এই সমীকরণের ক্রম ও মাত্রা কি? (Order and degree)

(c) $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^7+\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^5=75y$ এই সমীকরণের ক্রম ও মাত্রা কত?

(d) $\frac{dy}{dt}-2y=0;\ \ y(0)=9$ এর নির্দিষ্ট সমাধান নির্ণয় করো।

(e) $y''(t)-2y'(t)+5y=2$ এর বিশেষ সমাধান কি হবে?

2. নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণমান 5

(a) নীচের প্রাথমিক মান সংক্রান্ত সমস্যাদুটির সমাধান করো ঃ

(i) $\ddot{y}-\dot{y}=0,\ y(0)=\dot{y}(0)=1$

(ii) $\ddot{y}-5\dot{y}+6y=0,\ \ y(0)=3,\ \dot{y}(0)=7$

(b) $\ddot{y}+2\dot{y}+2\dot{y}=0$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটির যদি প্রাথমিক অবস্থা $y(0)=1, \quad \dot{y}(0)=0$ হয় তবে তার সমাধান কি হবে?

(c) $\ddot{y}+9y=0$ এই ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণটির প্রাথমিক মান $y(0)=2, \quad y(0)=1$ হল তা সমাধান করো।

(d) ধরা যাক একটি বাজারের মূল্য পরিবর্তনের হর ওই বাজারের অতিরিক্ত চাহিদার পরিমাণের 3 গুণ। যদি চাহিদা রেখার সমীকরণ $D=5-3p$ ও যোগান রেখার সমীকরণ $S=3-2p$ হয় তবে বাজারের গতিশীল স্থিতিশীলতা বিচার করো (dynamic stability)। প্রাথমিক অবস্থা প্রদত্ত আছে। $p = p_0$ যখন $t = 0$

(e) কোনো দেশের সঞ্চয় ওই দেশের জাতীয় আয়ের একটি নির্দিষ্ট হার (fixed proportion) ধরা যাক 60%। এবং সবসময় এই সঞ্চয় বিনিয়োগের সমান। যদি মূলধন-উৎপাদন অনুপাত (capital-output ratio) $\frac{1}{3}$ তে ধ্রুবক থাকে, তাহলে ওই অর্থনীতির বৃদ্ধির হার নির্ণয় করো। ওই অর্থনীতির তৃতীয় পর্যায়ে (United period) জাতীয় আয় কতো হবে যেখানে আয়ের প্রাথমিক মান হোলো 1500?

3. নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির প্রশ্নমান 10.

(a) প্রদত্ত $\frac{dP}{dt}=2(D-S)$ হলে যে বাজারের চাহিদা রেখা $D=2-2p,$ ও যোগান রেখার সমীকরণ $S=-4+4P$ সেই বাজারের স্থায়িত্ব বিচার করো।

(b) ধরা যাক চাহিদা ও যোগান রেখার সমাকরণ ঃ

$$Qd=-\alpha-\beta P+\alpha\frac{dP}{dt}, (\alpha,\beta,\gamma,\delta>0)$$

$$Q_6=-\gamma+\delta P$$

(i) ধরা যাক সময়ের সাপেক্ষে মূল্য পরিবর্তনের হার অতিরিক্ত চাহিদার সরাসরি অনুপাত (rate of change of price over time is directly proportional to the excess demand)। $p(t)$ এর সময় পথ নির্ধারণ করো।

(ii) আন্তঃসাময়িক (intertemporal) সামাবস্থা মূল্য কি হবে? বাজারে পরিস্কার মূল্য (Market Clearing price) কি হবে?

(c) প্যারামিটারের উপর কি নিষেধ (restriction) আরোপ করলে গতিময় স্থিতিশীলতা রক্ষা করা যাবে? (dynamic slability)

(c) ধরা যাক চাহিদা ও যোগান রেখার সমীকরণ ঃ

$$Q_d = \alpha - \beta P - \eta \frac{dP}{dt}, \quad Q_S = \delta P \ (\alpha, \beta, \eta, \delta > 0)$$

(i) ধরা যাক প্রতি মূহূর্তে বাজার পরিস্কার (Market is cleared). $P(t)$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

(ii) এই বাজারটির কি গতিময় স্থিতিশীল আন্তঃসাময়িক (inter temporal) সাম্যবস্থা মূল্য আছে?

(d) $y''(t) + 8y'(t) + 16y = 0$ এই সমীকরণটির সমাধান করো।

(e) $y''(t) + 6y'(t) + 5y = 10$ এই সমীকরণটি প্রাথমিক অবসথা $y(0) = 4$ ও $y'(0) = 2$ এর সাপেক্ষে দেখাও যে আন্তঃসাময়িক সাম্যাবস্থার গতিময় স্থিতিশীলতা আছে কিনা।

1.12 গ্রন্থপঞ্জি

1. Simou C and Blume L (2010) : Mathematics for Economists, Viva Books
2. Chiang A and Wain Wright K (2005) :
   Fundamental Methods of Mathematical Economics, Mcgraw Hile
3. Sarkhel J and Bhukta A (2016) : An introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Privale Limited.
4. Baumal W. J (1970) : Economic Dynamics : An Introduction. The Macflillan Company

একক 2 ❑ রৈখিক বীজগণিত

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে শিক্ষার্থীরা জানতে পারবে

(ক) সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্র কি এবং তার সংলগ্ন বিভিন্ন সমাধান বিধি কি

(খ) ভেক্টর বলতে কি বোঝায় এবং তার বিভিন্ন কার্যকারিতা কি

(গ) নির্ণায়ক কাকে বলে

(ঘ) নির্ণায়কের সমাধান কিভাবে ক্রেমার বিধি অনুসরণ করা সম্ভব

2.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতিতে একটি সরলরৈখিক সমীকরণ x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ হবে। যদি x এর মান প্রদত্ত থাকে তাহলে ওই সমীকরণের গঠনের মাধ্যমে y এর মান নির্ণয় করা যায় কিন্তু বহু সময় দেখা যায় একই সঙ্গে দুই বা তার অধিক সমীকরণের একত্র সমাধান সমস্যাটির সমাধান মেলে। যেমন বাজারের ক্ষেত্রে চাহিদার সমীকরণ ও যোগানের সমীকরণ একত্রে সমাধান না হলে ভারসাম্য মূল্য নির্ধারিত হবে না। এই অধ্যায়ে এই সমস্যার সমাধান বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

2.3 রৈখিক সমীকরণ তন্ত্র

একই ধরনের চলরাশি বিশিষ্ট সরলরৈখিক সমীকরণ সেটকে বলা হয় রৈখিক সমীকরণ তন্ত্র বা সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্র। উদাহরণস্বরূপ ঃ

$$3a - b + 14c = 7$$
$$2a + 2b + 3c = 0$$
$$a - 12b - 18c = 33$$

অর্থনৈতিক তত্ত্বে দুইভাবে সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্র সৃষ্টি হয়। কিছু অর্থনৈতিক মডেলের স্বাভাবিক সরলরৈখিক গঠন দেখা যায়। অপরপক্ষে যখন চলরাশি গুলির মধ্যস্থিত সম্পূর্ণ যদি অরৈকিক সমীকরণ তন্ত্র হয় (systems of non linear equations), তখন সেই সমীকরণগুলির অবকলের সাহায্যে তাদের কাছাকাছি (approximate) সরলরৈখিক তন্ত্রে পরিণত করা হয়।

সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্র সমাধানের দুটি পদ্ধতি আছে। একটি হলো গাউসিয়ান অপসারণ (Gaussian Elimination)। এই পদ্ধতি দিয়ে বোঝা যায় আদৌ সমাধান সম্ভব কিনা এবং যদি সম্ভব হয় তাহলে কতগুলো সমাধান পাওয়া যাবে সেই সমীকরণ তন্ত্রে। অপরটি হলো অন্তর্নিহিত তন্ত্র। এই ক্ষেত্রে অর্থনৈতিক সম্পর্কে জড়িত সমীকরণগুলির অন্তর্নিহিত এক্সোজিনাসও এন্ডোজিনাস চলরাশিগুলি একে অপরের সঙ্গে সমতা চিহ্নের একই দিকে মিলিত হয়।

2.3.1 গাউসিয়ান ও গাউস-জরডান অপসারণ ঃ (Gaussian and Gauss-Jordan Elimination)

m সংখ্যক সমীকরণ ও n সংখ্যক অজানা চলক বিশিষ্ট একটি সাধারণ রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রকে লেখা যায় ঃ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{m}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \ldots(1)$$

এই তন্ত্রে a_{ij} এবং b হলো প্রদত্ত বাস্তব সংখ্যা a_{ij} হলো i তম সমীকরণে x_j অজানা চলকের সহগ। (1) প্রদত্ত তন্ত্রের সমাধান হলো n টিউপ্‌ল (tuplex) সমন্বিত বাস্তব সংখ্যা $x_1, x_2, \ldots, x_n$ যা (1) এর

m সংখ্যক সমীকরণের প্রত্যেকটিকে পরিতৃপ্ত (satisfy) করে। যেমন যদি প্রদত্ত সমীকরণ তন্ত্র হয় ঃ

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$ তাহলে $x_1 = 2$ ও $x_2 = 1$ হলে প্রদত্ত তন্ত্রটির সমাধান পাওয়া গেল।

যদি প্রদত্ত তন্ত্রটি হল ঃ

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ তাহলে $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0$ হতে পারে নির্দিষ্ট সমাধান।

প্রদত্ত রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের ক্ষেত্রে তিন ধরনের অবস্থা হতে পারে।

(1) কোনো একটি সমাধান কি আদৌ পাওয়া যায়?

(2) কতগুলি সমাধান পাওয়া সম্ভব?

(3) এমন কোনো কলন বিধি (algorithm) আছে যা থেকে যথার্থ সমাধান পাওয়া সম্ভব?

সাধারণতঃ তিন ধরনের সমাধান পদ্ধতি পাওয়া যায় ঃ

(1) প্রতিস্থাপন (substitution)

(2) Elimination of variables বা চলকগুলির অপসারণ

(3) ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Matrix method)

2.3.2 প্রতিস্থাপন (Substitution)

এই পদ্ধতিতে (1) প্রদত্ত সমীকরণ তন্ত্রে শুরুতে একটি সমীকরণের মাধ্যমে যে কোনো একটি চলকের (x_n) সমাধান। অন্য চলকগুলির মাধ্যমে চার হলো যেখানে ওই চলকগুলি ওই নির্দিষ্ট সমীকরণে আছে। এবার x_n এর এই রূপ (expression) অপর $(m - 1)$ সমীকরণে বসানো হয়। অর্থাৎ এভাবে $(m - 1)$ সমীকরণ পাওয়া গেলো যাতে $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ অজানা চলক থাকে। এইভাবে যতক্ষণ পর্যন্ত একটিমাত্র সমীকরণ না পাওয়া যাবে ততক্ষণ পর্যন্ত সমাধান করে যাওয়া হয়। সবশেষে প্রথম একটি চলকের রূপটি যা অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়েছিল তার মাধ্যমে সকল xi গুলিকে সমাধান করা হয়।

উদাহরণ ঃ $3x + y = 13$

$5x - 2y = 7$

প্রথম সমীকরণ থেকে ঃ $y = 13 - 3x$ y এর মান দ্বিতীয় সমীকরণে প্রতিস্থাপন করলে ঃ

$5x - 2\ (13 - 3x) - 7$

$\Rightarrow$ $5x - 26 + 6x = 7$

$\Rightarrow$ $x = 3$ এবার প্রথম সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত y এর মানে; সেই $x = 3$ বসালে ঃ

$y = 13 - 3(3) = 4 \quad \therefore\ x = 3,\ y = 4$ নির্দিষ্ট সমাধান।

2.3.3 চলকের অপসারণ (Elimination of variables)

একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝানো হল ঃ

ধরা যাক ঃ $x_1 - 2x_2 = 8$

$3x_1 + x_2 = 3$ ....(3)

(3) প্রদত্ত সমীকরণে প্রথমটি –3 দিয়ে গুণ করলে পাই $-3x_1 + 6x_2 = -24$। এবার এই সমীকরণ ও (3) এর দ্বিতীয় সমীকরণ যোগ করলে পাই $7x_2 = -21$; $x_2 = -3$. এই x_2 এর মান (3) প্রদত্ত সমীকরণের যে কোনো দুটিতে বসালেই পাওয়া যাবে $x_1 = 2$। অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে যখন (3) সমীকরণটির প্রথমটি –3 দিয়ে গুণ করে দ্বিতীয়টির সঙ্গে যোগ করা হলো তখন x_1 কে তন্ত্রটি থেকে অপসারণ করা হলো।

উদাহরণ ঃ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

a_y সহগর উপর কি শর্ত আরোপ করলে সমীকরণ তন্ত্রটির সমাধান পাওয়া সম্ভব ?

সমাধান ঃ যদি $a_{22} \neq 0$ হয়, তাহলে

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$ প্রথম সমীকরণের প্রতিস্থাপন করে পাই ঃ

$$b_1 = \frac{a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} b_2$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

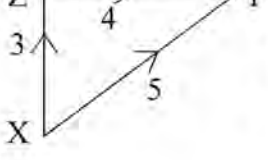
একইভাবে যদি প্রথম সমীকরণটি x_1 এর জন্য সমাধান করা যায়, তাহলে $a_{21} \neq 0$ হতে হবে। সমাধান সম্ভব যদি $a_{11}\ a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ হয়।

সুতরাং সেক্ষেত্রে $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির বিশদ আলোচনা তৃতীয় অধ্যায়ে করা হয়েছে।

2.4 ভেক্টর ও তার ক্রিয়াকলাপ (Vector and its operation)

ভেক্টর রাশি (Vectors) ঃ



যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়েই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে। যেমন সরণ, ত্বরণ, বেগ ইত্যাদি। যদি একজন লোক হেঁটে X অবস্থান তেকে 5 মিটার উত্তরে Z পর্যন্ত গিয়ে 10 মিটার Y অবস্থানে আসে তাহলে তার সম্পূর্ণ সরণ হয় 25 মিটার। ব্যক্তিটির সরণ ভেক্টর রাশি $\overline{xy}$ দ্বারা প্রকাশ

করা যায়, যেখানে দূরত্বের মান $= |\overrightarrow{xy}|$ এবং তীর চিহ্ন X থেকে Y এর দিকে দূরত্ব নির্দেশ করে।

ভেক্টরকে সারির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়, যেমন $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি হলো ভেক্টর।

কোনো ভেক্টর a_i দিয়ে চিহ্নিত করা যায়। উপরিল্লিখিত প্রথম ভেক্টরটির ক্ষেত্রে a র একটি ও দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে চারটি উপাদান আছে (lomponents). এবং $a_2 = 3$ ও $a_2 = -4$ হবে যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে a_i এর মান, যেখানে $i = 2$ যে সকল ভেক্টরের n সংখ্যক উপাদান থাকে তাকে n-ভেক্টর বলা হয়, এবং R^n চিহ্নের মাধ্যমে সকল n-ভেক্টরকে বোঝানো হয় যেখানে উপাদানগুলি বাস্তব সংখ্যা সমন্বিত হয়। দুটি ভেক্টর সমান হয় যদি তাদের সমসংখ্যক উপাদান থাকে ও অনুরূপ (corresponding) উপাদানগুলি সমান হয়। অর্থাৎ যদি X ও Y উভয়েই n-ভেক্টর হয় তবে একটি একক ভেক্টর সমীকরণ x = y : n-স্কেলার সমীকরণ ঃ $x_i = y_i$, $i = 1, 2, ..., n$ এর তুল্য হবে।

2.4.1 ভেক্টরের মূল ক্রিয়াকলাপ (Vector Arithmatic)

মূলতঃ একটি স্কেলার রাশি দ্বারা কোনো ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ আলোচনা করা হলো।

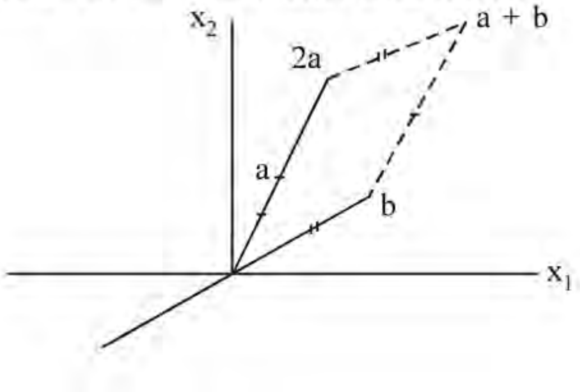
a ও b এই দুই ভেক্টরকে তখনই যোগ করা সম্ভব যদি এদের সমান সংখ্যা উপাদান থাকে। এক্ষেত্রে উপাদানগুলিকে পারস্পরিক সম অবস্থানের ভিত্তিতে যোগ করা হয়।

যেমন $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ -2+2 \\ -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

অনুরূপে স্কেলার দ্বারা কোনো ভেক্টরের গুণ ও উপাদানগুলির সঙ্গে একইভাবে সম্পন্ন করা হয়। যেমন

$$2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 \\ 2\times 4 \\ 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

চিত্রের সাহায্যে ভেক্টরের গাণিতিক প্রয়োগ (vector arithmetic) নিম্নলিখিত ভাবে দেখানো যায়।



a ও b থেকে a + b পাওয়ার জন্য সামন্তরিক (parallelogram) সম্পূর্ণ করা হলো। a থেকে 2a পাওয়ার জন্য, মূলবিন্দু থেকে a অবধি যে রেখা অঙ্কিত হয়েছে তাকে নির্ধারিত দিকেই 2 গুণিতক দিয়ে বর্ধিত করা হলো। a থেকে b পাওয়ার জন্য মূলবিন্দুতে b এর প্রতিফলন করা হলো।

শূন্য ভেক্টরকে, অর্থাৎ যে ভেক্টরের সবকটি উপাদান শূন্য থাকে তাকে চিহ্নিত করা হয় O_n হিসাবে বা O হিসাবে।

ভেক্টরের গাণিতিক বিধিগুলি হলো ঃ

(a) $a + b = b + a$

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(c) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

(d) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

(e) $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$

প্রথম বিধিটিকে বলা হয় বিনিময় বিধি (commulative law)। দ্বিতীয় বিধিটি হলো মিশুক বিধি (asseciative law)। (c) ও (d) বিধিদুটি হলো বণ্টনমূলক বিধি (distributive law)।

উল্লিখিত বিধি অনুসারে a – b + c হলো, যেখানে $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$, ন

$$4\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}7\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-5+14\\4-15+2\\12+10-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\-9\\16\end{bmatrix}$$

2.4.2 সরলরৈখিক নির্ভরতা (Linear Dependence)

a, b, c, d এই চারটি ভেক্টরের সরলরৈখিক সংমিশ্রণের (Linear combination) রূপ হলো ঃ

$\alpha a + \beta b + \chi c + \delta d$. এক্ষেত্রে α, β, χ, δ এই চারটিই হলো স্কেলার রাশি। ধরা যাক একটি n ভেক্টরের সেট, b^1, b^2, ..., b^k. এই ভেক্টরগুলি সরলরৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে যদি এদের যে কোনো একটিকে, অপরগুলির সরলরৈখিক সংমিশ্রণ (Linear combination) হিসেবে প্রকাশ করা যায়। যদি কোনো ভেক্টরকেই অপরগুলির সরলরৈখিক সংমিশ্রম রূপে প্রকাশ করা না যায় তবে তারা সরলরৈখিকভাবে স্বাধীন হবে (linearly independent)।

উদাহরণ ঃ $a=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$; $b=\begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix}$; $c=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ যদি হয় তাহলে দেখা যাচ্ছে $b = 2(a + c)$। সুতরাং a, b, c হলো সরলরৈখিক নির্ভরশীল। b^1, b^2, ..., b^k ভেক্টরগুলি সরলরৈখিক নির্ভরশীল হবে কেবলমাত্র যদি α_1, α_2, ..., α_k, k সংখ্যক স্কেলার রাশি, যারা সবকটিই শূন্য হয়, অবস্থান করে যেখানে

$\alpha_1 b^1 + \alpha_2 b^2 + ... + \alpha_k b^k = 0$ হয়।

উদাহরণ ঃ $a=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$; $b=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$; $c=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

এই তিনটি ভেক্টররাশি সরলরৈখিক নির্ভরশীল?

সমাধান ঃ ধরা যাক α, β ও χ তিনটি স্কেলার রাশি যেখানে $\alpha a + \beta b + \chi c = 0$

এক্ষেত্রে $2\alpha + 4\beta + \chi = 0$

$\alpha + \beta + \chi = 0$

$2\alpha + 3\beta + 2\chi = 0$

নির্মূল পদ্ধতি (elemination) অনুসরণ করলে

$$2\alpha + 4\beta + \chi = 0 \quad -\beta + \frac{1}{2}\chi = 0 \quad \frac{1}{2}\chi = 0$$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে $\alpha = \beta = \chi = 0$. সুতরাং a, b, c ভেক্টরগুলি রৈখিকরূপে স্বাধীন।

2.4.3 স্কেলার রাশি বা নির্দিক রাশি ও ভেক্টর রাশি বা সদিক রাশির পার্থক্য (Difference between scalar quantity and vector quantity)

যে সকল রাশিকে শুধুমাত্র পরিমাণ দিয়ে সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করা যায় তাকে স্কেলার রাশি বলা হয়। অর্থাৎ স্কেলার রাশির মান আছে, কোনো দিক থাকে না। যেমন সময়, জনসংখ্যা, দূরত্ব, দৈর্ঘ্য ইত্যাদি।

কিন্তু যে সকল রাশির সম্পূর্ণ প্রকাশের জন্য তার মান ও দিক উভয়েই জানার প্রয়োজন তাকে সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি বলা হয়। যেমন ওজন, গতিবেগ ইত্যাদি।

স্কেলার রাশির শুধু মান থাকায় তাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি বীজগণিতের সাধারণ নিয়ম অনুসারে হয়ে থাকে। কিন্তু ভেক্টর রাশির মানের সঙ্গে দিক জড়িত থাকায় তাদের যোগ বিয়োগ গুণ ইত্যাদি বীজগণিতের সাধারণ নিয়মানুসারে করা যায় না। কারণ দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল শুধু রাশিগুলোর মানের উপর নির্ভরশীল নয়, তাদের দিক ও মধ্যবর্তী কোণের উপরও নির্ভর করে।

2.5 নির্ধারক

কিছু সংখ্যার বর্গাকৃতি বিন্যাসকে (square arrangements of numbers in array form) নির্ধারক বলা হয়। দুটি সরলরৈখিক সমীকরণ বিবেচনা করা হলো ঃ

$ax + by = 0$ ....(1)

$cx + dy = 0$ ....(2)

যদি এই সমীকরণগুলির অতুচ্ছ (non trural) সমাধান থাকে, অর্থাৎ $x = 0$, $y = 0$ ছাড়া অন্য সমাধান থাকে, তাহলে অবশ্যই a, b, c, d এই সহগগুলির মধ্যে সম্পর্ক থাকবে। দুটি সমীকরণ থেকে x এবং y যদি অপসারণ (eliminate) করা যায় তাহলে সেই সম্পর্ক পাওয়া যাবে। প্রথম সমীকরণকে c ও দ্বিতীয়টিকে a দিয়ে গুণ করে যদি বিয়োগ করা যায় তাহলে হবে $(bc - ad)\, y = 0$

$bc - ad = 0$ *i.e.* $ad - bc = 0$ .....(3) $(\therefore\ y \neq 0)$

সমীকরণ (3) যদি পূরণ হয় তাহলে (1) ও (2) সমীকরণের অ-তুচ্ছ সমাধান পাওয়া যাবে। সমীকরণ (3) এর বাঁদিকের পক্ষকে প্রকাশ করা যায় ঃ

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ এবং এই প্রকাশকেই বলা হয় দ্বিতীয় মাত্রার নির্ধারক (determinants of order-2)।

2.5.1 নির্ধারকের বিস্তার (Expansion of determinants)

এবার $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ নির্ধারকটি দুইটি সারি ও দুইটি স্তম্ভবিশিষ্ট। এই a, b, c, d কে বলা হয় নির্ধারকের উপাদান। অর্থাৎ

$$\left|\begin{array}{cc} a & b \\ b & d \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{প্রথম} & \text{দ্বিতীয়} \\ \text{স্তম্ভ} & \text{স্তম্ভ} \end{array}\right| \begin{array}{l} \rightarrow \text{ প্রথম সারি} \\ \\ \\ \rightarrow \text{ দ্বিতীয় সারি} \\ \\ \end{array}$$

নির্ধারকের মান হলো ঃ $ad - bc$

তিনটি সরলরৈখিক পারস্পরিক সমীকরণ বিবেচনা করা হলো (simultaneous equation)

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ......(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ......(2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ....(3)

সমীকরণ (2) ও সমীকরণ (3) কে বিপরীতগুলি পদ্ধতি দ্বারা (cross multiplication) পাই ঃ

$$\frac{x}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{y}{a_3c_2 - a_2c_3} = \frac{1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{b_2c_3 - c_2b_3}{a_2b_3 - b_2a_3} \quad y = \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - b_2a_3} \quad (a_2b_3 - b_2a_3 \neq 0)$$

x ও y এর মান প্রথম সমীকরণে বসিয়ে পাই ঃ

$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0$ ....(4)

সমীকরণ (4) এর বাঁদিকের পক্ষকে লেখা যাবে $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং এটি একটি ত্রিমাত্রিক নির্ধারক (Third order determinants)

অর্থাৎ $|A| = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$

বা $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

2. নির্ধারকের ধর্মাবলী (Properties of determinants) :

1. যদি কোনো নির্ধারকের সারিতে স্তম্ভ ও স্তম্ভকে সারিতে রূপান্তর করা যায় তাহলে নির্ধারকের মান অপরিবর্তিত থাকে। যেমন ঃ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

2. যদি যে কোনো দুটি পাশাপাশি সারি বা পাশাপাশি স্তম্ভ (adjaceul rowx or two adjaceut columns) পরস্পর বদল করা হয় (interchanged) তাহলে নির্ধারকটির পরম মান (absolute value) একই থাকবে কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তিত হবে। যেমন—

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

এক্ষেত্রে প্রথম ও দ্বিতীয় সারি পরিবর্তিত হয়েছে এবং তাই চিহ্ন পরিবর্তন হয়েছে।

3. যদি কোনো নির্ধারকের যে কোনো লাইন p সমান্তরাল লাইনের উপর দিয়ে অতিক্রম করে তাহলে (passed over) পরিণতি প্রাপ্ত নির্ধারক হবে (resultant determinant) $(-1)^p\ \Delta$ যেখানে Δ হলো মূল নির্ধারক। যেমন

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^1 \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix}$$

উপরের সমস্যাটির ক্ষেত্রে প্রথমে, চতুর্থ সারিটিকে তিনটি সমান্তরাল সারির উপরে অতিক্রম করানো হলো এবং সেক্ষেত্রে $(-1)^3$ হলো। তারপর তৃতীয় সারিকে দুটি সমান্তরাল সারির উপর অতিক্রম করানো হয় এবং তাই $(-1)^2$ হয় এবং পরিশেষে দ্বিতীয় সারিকে একটি সমান্তরাল সারি অতিক্রম করানো হয় এবং সেক্ষেত্রে $(-1)^1$ হয়। যদি সারির পরিবর্তে স্তম্ভ হয়, তাহলেও একই নীতি অবলম্বন করা হয়।

4. যদি কোনো নির্ধারকের যে কোনো দুটি সারি বা দুটি স্তম্ভ একই হয় তাহলে নির্ধারকটি উধাও হয় বা তার মান শূন্য হয়। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

5. যদি কোনো নির্ধারকের যে কোনো রাশি বা স্তম্ভের প্রত্যেকটি উপাদানকে একটি রাশি দিয়ে গুণ করা হয় তাহলে সমগ্র নির্ধারকটিই সেই রাশি বা উৎপাদক দিয়ে গুণ করা যাবে। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

আবার, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 & \alpha c_2 \\ \beta a_3 & \beta b_3 & \beta c_3 \end{vmatrix} = \alpha b\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

6. যদি কোনো সারি বা স্তম্ভের সবকটি উপাদান r পদ যুক্ত হয় তাহলে নির্ধারকটি r সংখ্যক নির্ধারকের যোগফল হিসাবে প্রকাশিত হয়। যেমন ঃ

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. যদি কোনো নির্ধারকের কোনো সারি বা স্তম্ভের প্রতিটি উপাদানের সঙ্গে অন্য কোনো সারি বা স্তম্ভের উপাদানগুলি সমান সংখ্যা বা রাশি দিয়ে গুণ করে তাকে, পূর্ববর্তী সারি বা স্তম্ভের উপাদানের সঙ্গে যোগ বা বিয়োগ করা হয়, তাহলে নির্ধারকটির মান একই থাকে। (If from each constituent of a row (A column) of a determinant are added or subtracted the equimultiplex of the corresponding constituent of any other row (or column) the determinant remains unattered)।

যেমন $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবার ধরা যাক প্রথম স্তম্ভের সঙ্গে দ্বিতীয় স্তম্ভের প্রতি উপাদানের p গুণ যোগ ও তৃতীয় স্তম্ভের প্রতি উপাদানের q গুণ বিয়োগ করা হলো। তাহলে নির্ধারকটির মানের কোনো পরিবর্তন করে না।

সুতরাং $\begin{vmatrix} a_1+pb_1-qa & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2-qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3-qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p\times o - q\times o$

(4 নং নীতি অনুসারে)

8. বিশেষ নির্ধারক (special determinants)

প্রতিময় নির্ধারক (symmetric determinants)

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

উদাহরণ 1 ঃ বিস্তার না করে নিম্নলিখিত নির্ধারকগুলির মান নির্ণয় করো ঃ

(a) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$

সমাধান ঃ (a) $c_1 + c_2 + c_3$ অর্থাৎ প্রথম ও দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্তম্ভের প্রতি উপাদান যদি যোগ করা যায় তাহলে হয়

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

(b) $\begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$

$R_1 - R_2$ (প্রথম সারি – দ্বিতীয় সারি) এবং $R_2 - R_3$ করলে পাই ঃ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b-c & b-c & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$$

R_1 ও R_2 এর উপাদানগুলি অভিন্ন।

$\therefore \ \Delta = 0.$

যদি $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ হয় তবে x এর সকল বাস্তব মানগুলি নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ or $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+1 & x+1 & -1 \\ x+1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

$$(c_1' = c_1 + c_2 + c_3)$$

$$\text{or}(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & x+1 & -1\\1 & 1 & x+1\end{vmatrix}=0 \text{ or } (x+1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & x & -2\\1 & 0 & x\end{vmatrix}=0$$

$$(c_2{}'=c_2-c_1\ c_3{}'=c_3-c_1)$$

$$\text{or}\left\{1(x^2-0)-0+0\right\}(x+1)=0$$

or $x^2(x+1)=0 \quad \therefore x=0, 0, -1.$

3. দেখাও যে ঃ $\begin{vmatrix}a+b+2c & a & b\\c & b+c+2a & b\\c & a & c+a+2b\end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$

সমাধান ঃ $\text{LHS}=\begin{vmatrix}a+b+c & -(b+c+a) & 0\\0 & b+c+a & -(c+a+b)\\c & a & c+a+2b\end{vmatrix}$

$(R_1=R_1-R_2$ ও $R_2=R_2-R_3)$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\c & a & c+a+2b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2[1(c+a+2b+a)-(-1)(+c)+0]=(a+b+c)^2[c+2a+2b+c]$$

$=(a+b+c)^2,\ 2(a+b+c)=2(a+b+c)^3$ প্রমাণিত।

4. বিস্তার না করে দেখাও যে $\begin{vmatrix}1 & x & x^2-yz\\1 & y & y^2-zx\\1 & z & z^2-xy\end{vmatrix}=0$

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix}1 & x & x^2-yz\\1 & y & y^2-zx\\1 & z & z^2-xy\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & x & yz\\1 & y & zx\\1 & z & xy\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}-\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}x & x^2 & xyz\\y & y^2 & xyz\\z & z^2 & xyz\end{vmatrix}$$

(প্রথম সারির প্রত্যেক উপাদানকে x, দ্বিতীয় সারির প্রত্যেক উপাদানকে y ও তৃতীয় সারির প্রত্যেক উপাদানকে z দিয়ে গুণ করে সমগ্র নির্ধারকটি xyz দিয়ে ভাগ করা হলো)

$$=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}-\frac{1}{xyz}\ xyz\begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\y & y^2 & 1\\z & z^2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 1 & x^2\\y & 1 & y^2\\z & 1 & z^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}=0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

5. দেখাও যে $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\a^2 & 1 & a\\a & a^2 & 1\end{vmatrix}$ একটি যথার্থ বর্গক্ষেত্র।

সমাধান ঃ দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্তম্ভের সবকটি উপাদানকে প্রথম স্তম্ভের উপাদানগুলির সঙ্গে যোগ করলে পাই ঃ

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+a+a^2 & a & a^2\\1+a+a^2 & 1 & a\\1+a+a^2 & a^2 & 1\end{vmatrix}\quad \Delta=(1+a+a^2)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & 1 & a\\1 & a^2 & 1\end{vmatrix}$$

প্রথম সারির প্রত্যেক উপাদানকে দ্বিতীয় তৃতীয় সারির উপাদানগুলি থেকে বিয়োগ করলে পাই ঃ

$$\Delta=(1+a+a^2)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\0 & 1-a & a-a^2\\0 & a^2-a & 1-a^2\end{vmatrix}$$

$$=(1+a+a^2)\begin{vmatrix}1-a & a-a^2\\a^2-a & 1-a^2\end{vmatrix}=(1+a+a^2)(1-a)^2\begin{vmatrix}1 & a\\-a & 1+a\end{vmatrix}$$

$$=(1+a+a^2)(1-a)^2(1+a+a^2)=(1-a^3)^2.$$

2.5.2 মাইনর ও কোফ্যাক্টর (Minor and Cofactor)

কোনো নির্ধারক বা নির্ণায়কদের যে কোনো উপাদানের মাইনর বলতে বোঝায়, নির্ণায়কটির মাত্রার পরিবর্তন না করে, উক্ত উপাদানটির সংশ্লিষ্ট সারি ও স্তম্ভকে অপসারণ করে প্রাপ্ত নির্ণায়ক। যেমন যদি

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হয় তবে c_1 এর মাইনর হলো $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ অর্থাৎ c_1 এর অবস্থান যেহেতু প্রথম সারি ও তৃতীয় কলামের অন্তর্গত তাই তাদের অপসারণ করে c_1 এর মাইনর পাওয়া গেলো।

একই ভাবে a_2 ও b_3 এর মাইনর হলো ঃ $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(i, j) তম উপাদানের কোফ্যাক্টর হলো = $(-1)^{i+j} \times$ (i, j) তম উপাদানের মাইনর। অর্থাৎ D নির্ণায়কটির c_1 এর কোফ্যাক্টর হলো ঃ

$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ আবার a_2 ও b_3 এর কোফ্যাক্টর হলো $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ যথাক্রমে।

উদাহরণ ঃ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির 4 এর কোফ্যাক্টর নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ 4 এর মাইনর হলো ঃ । 4 এর অবস্থান যেহেতু প্রথম সারি এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ তাই উক্ত সারি বা স্তম্ভকে অপসারণ করে নির্ণীত নির্ণায়কটির মান হলো মাইনর।

অতএব 4 এর কোফ্যাক্টর হলো ঃ

$$(1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

2.5.3 সংলগ্ন (adjoint) এবং অন্যোন্যক (reciprocal) নির্ণায়ক ঃ

কোনো নির্ণায়ক A এর সংলগ্ন নির্ণায়ক বলতে বোঝায় সেই নির্ণায়কটিকে যার উপাদানগুলি হলো A নির্ণায়কের অনুরূপ উপাদানগুলির কোফ্যাক্টর দ্বারা গঠিত। একে A′ দিয়ে চিহ্নিত করা যায়।

ধরা যাক $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

সুতরাং $A' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

A_1, A_2 ..... হলো A নির্ণায়কের a_1, a_2, ... ইত্যাদি উপাদানের কোফ্যাকটর।

A নির্ণায়কের অনোন্যক $A'' = \begin{vmatrix} \frac{A_1}{A} & \frac{A_2}{A} & \frac{A_3}{A} \\ \frac{B_1}{A} & \frac{B_2}{A} & \frac{B_3}{A} \\ \frac{C_1}{A} & \frac{C_2}{A} & \frac{C_3}{A} \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3}$ (A এর অ্যাজ্জয়েক)

উদাহরণ ঃ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির অ্যাডজয়েন্ট ও অন্যোন্যক নির্ণায়ক নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $A' = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

এখন $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2) - 2(2-2) + 3(2-1) = 2$

A এর অন্যোন্যক নির্ণায়ক হলো $A'' = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

2.6 ক্রেমার বিধির প্রয়োগ

সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের সমাধান ক্রেমার বিধির উপর ভিত্তি করে করা যায়। দুটি সমীকরণ বিবেচনা করা যাক ঃ

$a_1x + b_1y = d_1$

$a_2x + b_2y = d_2$

ক্রেমার বিধি অনুসারে ঃ $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ যেখানে $\Delta \neq 0$ এবং $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}$ এখানে Δ এর প্রথম স্তম্ভতে $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করা হয়েছে $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$কে

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ এখানে Δ এর দ্বিতীয় স্তম্ভকে $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করা হয়েছে। ক্রেমার বিধি অনুসারে $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ও $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$।

উদাহরণ ঃ ক্রেমার বিধি অবলম্বন করে সমাধান করো ঃ

$x + 2y - z = 9$

$2x - y + 3z = -2$

$3x + 2y + 3z = 9$

সমাধান ঃ ধরা যাক $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\ (-3 - 6)\ -2(6 - 9)\ -1(4 + 3)$

$$= -9 + 6 - 7 = -10 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9(-3-6) - 2(-6-27) - 1(-4+9)$$

$$= -81 + 66 - 5 = -20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 1(-6-27) - 9(6-9) + (-1)(18+6) = -30$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 1(-9+4) - 2(18+6) + 9(4+3) = -53 + 63 = 10$$

ক্রেমার বিধি অনুসারে ঃ $\frac{x}{D_1} = \frac{y}{D_2} = \frac{z}{D_3} = \frac{1}{D}$

$\therefore \frac{x}{D_1} = \frac{1}{D}$ বা $x = \frac{D_1}{D} = \frac{-20}{-10} = 2$

$\frac{y}{D_2} = \frac{1}{D}$ বা $y = \frac{D_2}{D} = \frac{-30}{-10} = 3$

$\frac{z}{D_3} = \frac{1}{D}$ বা $z = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{-10} = -1$

উদাহরণ 2 ঃ $x + y + z = 4$

$x - 2y + z = -2$

$3x + 2y + 7z = 14$

ক্রেমার বিধি অনুসারে x, y ও z এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(-14 - 2) - 1(7 - 3) + 1(2 + 6)$

$= -16 - 4 + 8 = -12$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 14 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 4(-14-2) - 1(-14-14) + 1(-4+28) = -64 + 28 + 24 = -12$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 14 & 7 \end{vmatrix} = 1(-14-14) - 4(7-3) + 1(14+6) = -28 - 16 + 20 = -24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 1(-28+4) - 1(14+6) + 4(2+6) = -24 - 20 + 32 = -12$$

$$\therefore \ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2 \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1$$

নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = 1, y = 2, z = 1$।

2.7 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়টিতে রৈখিক সমীকরণের ব্যাখ্যা এবং সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্র কিভাবে প্রকাশ করা হয় তার আলোচনা করা হয়েছে। এ প্রসঙ্গে ভেক্টর ও তার কার্যপদ্ধতি অর্থাৎ তার যোগ, বিয়োগ, গুণণ সংক্রান্ত নীতি দেখানো হয়েছে। সরলরৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের গাণিতিক সমাধান কিভাবে নির্ণায়কের গঠনের মাধ্যমে ক্রেমার বিধি অনুসরণে করা হয় তার বিবাদ ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। এই প্রসঙ্গে নির্ণায়ক সম্পর্কে ধারণা ও তার বিবিধ ধর্মগুলিও প্রকাশ করা হয়েছে।

2.8 প্রশ্নাবলী

বিভাগ- ক

1. নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান 2

(a)অপসারণ (elimination) পদ্ধতিতে নীচের দুটি সমীকরণ থেকে x ও y এর মান নির্ণয় করো ঃ

$$2x + 5y = -10$$
$$-2x + 4y = 0$$

(b) যদি $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ও $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ হয় তবে 3a – 4b কত হবে?

(c) নীচের ভেক্টরগুলি কি সরলরৈখিকভাবে নির্ভরশীল?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(d) যদি $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ হয় তবে A নির্ণায়কটির মান কতো হবে?

(e) যদি $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ হয় তবে x এর মান কতো হবে?

2. নীচের প্রশ্নগুলির পূর্ণমান 5

(a) ধরা যাক $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2q \\ 6 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} p+2 \\ -5 \\ 3r \end{bmatrix}$ যদি x = 2y হয় তাহলে p, q, ও r কতো হবে?

(b) যদি তিনটি ভেক্টর এমন হয় যে

$A = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ও $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ তবে তাদের রৈখিক নির্ভরতা যাচাই করো।

(c) বিস্তার না করে দেখাও যে $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

(d) দেখাও যে $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$ একটি যথার্থ বর্গক্ষেত্র (perfect square)।

(e) x এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ হবে?

3. নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণমান 10

(a) নীচের সমীকরণটি সমাধান করে x, y ও z এর মান কতো হবে দেখাও।

$4x - y + 2z = 13$

$x + 2y - 2z = 0$

$-x + y + z = 5$

(b) নীচের সমীকরণ তন্ত্রটি বিবেচনা করে পরীক্ষা করো যে সমীকরণতন্ত্রটির ক্ষেত্রে কোনো একক সমাধান (unique solution) সম্ভব কিনা। যদি না হয় তাহলে তার কারণ পরীক্ষা করো।

$- x - y + z = -2$

$3x + 2y -2z = 7$

$x + 3y - 3z = 0$

(c) যদি $x + y + z = 0$ হয় তবে প্রমাণ করো

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$$

(d) ক্রেমার বিধি অবলম্বনে সমাধান করো ঃ

$x + 2y + 3z = 6$

$2x + 4y + z = 7$

$3x + 2y + 9z = 14$

(e) বিস্তার না করে দেখাও যে

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+4 & x+2 \\ x+2 & x+5 & x+4 \\ x+3 & x+6 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

2.9 গ্রন্থপঞ্জি ঃ

1. Hoy Levernois McKenna Rees slengos (2012) : Mathematics for Economics, PH1 Learning Private Limited.
2. Sydsaeter and Hammond (2002) : Essential Mathematics for Gonomic Analysis Prentice Hall, Iac, Loudan 2002.
3. Simon C and Lawrence B (1994) : Mathematics for Economics, W.W. Naton and Company.

একক 3 ❑ রৈখিক বীজগণিতের অতিরিক্ত বিষয়

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়ের পঠনের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা সরলরৈখিক বীজগণিতের অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং তার প্রয়োগ সম্পর্কে জানতে পারবে। যেমন—

(ক) ম্যাট্রিক্স ও তার প্রকারভেদ

(খ) রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে প্রকাশ

(গ) কিভারে রৈখিক সমীকরণ তন্ত্র সহগ ম্যাট্রিক্সের ইনভার্সের (inverse) মাধ্যমে সমাধান করা সম্ভব

(ঘ) ইনপুট আউটপুট পদ্ধতির ধারণা ও সমাধান যায়

3.2 প্রস্তাবনা

ম্যাট্রিক্স একটি বড় সমীকরণ তন্ত্রকে অত্যন্ত সংক্ষিপ্ত ও গঠনমূলকভাবে প্রকাশ করার একটি সহজ মাধ্যম। আবার একই সঙ্গে নির্ণায়কের সাহায্যে দেখায় যে সমীকরণতন্ত্রটির সমাধান আদৌ সম্ভব কিনা। সেই তন্ত্রটি যদি সমাধান যোগ্য হয় তবে তা কেমন করে করা সম্ভব সেই পদ্ধতিও ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। অর্থনৈতিক বিভিন্ন সমস্যার ক্ষেত্রে তিন বা চার বা তারও অধিক দ্রব্যসমন্বিত মডেলের একত্র সমীকরণের (simultaneous equation system) সমাধান প্রয়োজন হয়। ম্যাট্রিক্স এই ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ। অবশ্য এইসব ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ সমীকরণ তন্ত্রটিই সরলরৈখিক হওয়া আবশ্যক। এই অধ্যায়ে ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত ধারণা এবং তার বিভিন্ন দিক আলোচিত হয়েছে।

3.3 ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা

কতকগুলো সংখ্যাকে যদি সারি এবং স্তম্ভ বা কলাম আকারে সাজানো যায়, তাহলে যে আয়তাকার বা বর্গাকার বিন্যাস পাওয়া যায়, তাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এক্ষেত্রে অনুভূমিক বরাবর যে উপাদানগুলির বিন্যাস হয় তাকে সারি এবং উল্লম্ব বরাবর যে উপাদানগুলির বিন্যাস হয় তাকে কলাম বা স্তম্ভ বলা হয়।

ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করতে সাধারণত তৃতীয় [ ] বা প্রথম বন্ধনী ( ) অথবা || || প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যে সংখ্যা বা রাশি নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদেরকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (entry) বা উপাদান (element) বলা হয়। যেগুলোকে a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ইত্যাদিভাবে প্রকাশ করা হয়। ম্যাট্রিক্সকে সাধারণত ইংরেজী বড় অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যেমন

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ বা } B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ ইত্যাদি।}$$

সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স [aij] র মাধ্যমে দেখানো হয়। এখানে $i = 1, 2, ...m$ হলো সারি সংখ্যা এবং $j = 1, 2, ..., n$ হলো স্তম্ভ সংখ্যা।

অর্থাৎ, $A = [aij]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ am_1 & am_2 & ...... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$

বিশদ ব্যাখ্যা ঃ

ধরা যাক দুটি রৈখিক সহ সমীকরণ হলো $a_1x + b_1y = 0$ এবং $a_2x + b_2y = 0$. যদি প্রথম সমীকরণকে b_2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে b_1 দিয়ে গুণ করা হয়, এবং তারপর বিয়োগ করা হয়, ও বিয়োগফলকে x দিয়ে ভাগ করা হয় তাহলে হলো ঃ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ একে বলা হয় সমীকরণ দুটির অপসারণ ফল (elimination)। এর বামপক্ষকে অনেক ক্ষেত্রে $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ আকারে প্রকাশ করা হয় যা হলো ম্যাট্রিক্স। চলরাশি x এবং y এর a_1, b_1, a_2, b_2 সহগ বা পদগুলিকে বলা হয় ম্যাট্রিক্সের উপাদান (element)। যদি n সংখ্যক চলক দ্বারা গঠিত m সংখ্যক একটি সহ সমীকরণ বিবেচনা করা হয়।

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1$

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_2nx_n = c_2$

$an_1x_1 + an_2x_2 + ... + am_nx_n = c_m$

এক্ষেত্রে a_{11}, a_{12}, ... ইত্যাদি x_1, x_2 ..... চলরাশির সহগ (coefficient) এবং c_1, c_2 ...... বিভিন্ন সমীকরণগুলির প্যারামিটার, যাদের স্থির রাশি (constant) হিসাবে মনে করা হয়।

উপরের সহ সমীকরণের তিন ধরনের উপাদানের প্রথম উপাদান a_{11}, a_{12} .... সহগসমূহ, দ্বিতীয় উপাদান x_1, x_2 চলরাশিসমূহ এবং শেষ উপাদান c_1, c_2 স্থির রাশিসমূহ।

যদি তিন ধরনের উপাদানকে শ্রেণীবদ্ধভাবে সাজানো যায় তাহলে প্রত্যেকটি একটি ম্যাট্রিক্সের রূপ নেবে অর্থাৎ ঃ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ...... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}_{n\times 1} ; \; C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

কোনো ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে অনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা সারি এবং উল্লম্ব বরাবর বিন্যস্ত ভুক্তি বা কলাম কে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন—

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{প্রথম সারি} \\ \rightarrow \text{দ্বিতীয় সারি} \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

প্রথম দ্বিতীয় তৃতীয়

কলামকলাম কলাম

উদাহরণ ঃ ধরা যাক x_1, x_2, x_3 এই তিনটি চলকের সাহায্যে নিম্নলিখিত সহ সমীকরণটি গঠিত হলো ঃ

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 27$$
$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 19$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 15$$

এখানে $a_{11} = 4$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 5$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 6$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 3$, $c_1 = 27$, $c_2 = 19$, $c_3 = 15$.

অর্থাৎ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \\ 15 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

A, X, C প্রত্যেকটিই এক একটি গুণাঙ্ক।

3.4 ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা অর্ডার

কোনো ম্যাট্রিক্সের অনুভূমিক সারির সংখ্যা এবং উল্লম্ব সারির সংখ্যা দ্বারা উক্ত ম্যাট্রিক্সের ক্রম নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ m অনুভূমিক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভ সারি সমন্বিত ম্যাট্রিক্সের ক্রম হলো $m \times n$। একে বলা হয় m বাই n (read as m by n)।

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ এর ক্রম হলো 3×3. এখানে মোট 9 টি উপাদান আছে।

3.5 ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ

(A) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স ঃ কোনো ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলাম সংখ্যা অসমান হলে তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$

(B) সারি ম্যাট্রিক্স ঃ কেবলমাত্র একটি সারি সমন্বিত ম্যাট্রিক্স হলো সারি ম্যাট্রিক্স বা সারি ভেক্টর।

(C) কলাম ম্যাট্রিক্স ঃ একটি কলাম সহযোগে গঠিত ম্যাট্রিক্স কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর।

যেমন— $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{n_1} \end{bmatrix}_{n\times1}$

(D) শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null Matrics) ঃ যদি কোনো ম্যাট্রিক্সের $(m \times n)$ এর সবকটি উপাদান শূন্য থাকে তাহলে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স $(m \times n)$ বলা হয় ও $m{\times}n$ ভাবে চিহ্নিত করা যায়। যেমন—

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ বা $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1}$ দুটি 3×3 ক্রম বিশিষ্ট ও 3×1 ক্রম বিশিষ্ট শূন্য ম্যাট্রিক্স।

(E) বর্গক্ষেত্র ম্যাট্রিক্স (Square matrics) এবং আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular Matrics) ঃ যদি কোনো ম্যাট্রিক্সের সারি এবং স্তম্ভ সরান হয় তাহলে সেটি বর্গক্ষেত্র ম্যাট্রিক্স এবং এক্ষেত্রে ভিন্নতা দেখা দিলে তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ কোনো $m \times n$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $m \neq n$ হলে তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স হিসাবে গণ্য করা হবে।

অর্থাৎ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ এটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3}$ একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

(F) তির্যক ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrics) ঃ যে ম্যাট্রিক্সের কেবলমাত্র মুখ্য তির্যক বা কর্ণের (principal diagonal) উপাদান গুলি শূন্য বিহীন হয়, এবং বাকী সকল উপাদান শূন্য হয়, অর্থাৎ কেবলমাত্র তির্যকভাবে অবস্থান কারী সংখ্যাগুলির মধ্যে একটি সংখ্যান্ত শূন্য হবে না এবং বাকী স্থানের উপাদান গুলি শুধুই শূন্য হবে তাকে তির্যক ম্যাট্রিক্স বলা হবে।

যেমন $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3\times3}$ একটি বর্গাকার তির্যক ম্যাট্রিক্স (3×3)।

(G) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar matrics) ঃ যে ম্যাট্রিক্সের সবকটি মুখ্য তির্যক উপাদানগুলি (leading diagoneal elements) সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্সের উদাহরণ।

(H) অভেদক বা একক ম্যাট্রিক্স (Identity Matrics) ঃ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলি '1' এবং অবশিষ্ট উপাদানগুলি শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয়। একে $Im{\times}n$ অর্থাৎ n বর্গবিশিষ্ট হিসেবে চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স $A = [aij]$ যদি হয়, তাহলে $aij = 0 \ \forall$ (for all) $i \neq j$ এবং $aij = 1$ হয় যখন সবকটি $i = j$ হয়। যেমন $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ অভেদক ম্যাট্রিক্স।

(I) সমতা ম্যাট্রিক্স (Equal Matrics) ঃ $A = [aij]$ এবং $B = [bij]$ এই দুই ম্যাট্রিক্স সর্বসম হবে যদি নিম্নলিখিত দুটি শর্তপূরণ করে ঃ

(i) দুই ম্যাট্রিক্সেরই ক্রম সমান হবে।

(ii) দুই ম্যাট্রিক্সেরই সমস্থানিক উপাদানগুলি সমান হবে অর্থাৎ aij = bij (i = 1, 2, ..., m) এবং (j = 1, 2, ..., n)। যেমন ঃ এবং ম্যাট্রিক্সদ্বয় সর্বসম।

উদাহরণ ঃ $\begin{bmatrix} 1 & 25 & 9 \\ 16 & 8 & 27 \end{bmatrix}_{2\times3}$ এবং $\begin{bmatrix} x-1 & 5 \\ x-3y & 5 \end{bmatrix}$ যেহেতু দুটি ম্যাট্রিক্সই সর্বসম, সুতরাং $x + 1 = 5,\ x - 1 = 3,\ x - 3y = y$

$x = 5 - 1 = 4 \quad x = 4.$

$\therefore\ x - 3y = y$ সমীকরণ x এর মান বসিয়ে পাই $4 = 4y$। $\therefore\ y = 1.$

সুতরাং নির্ণেয় মান $x = 4,\ y = 1.$

(j) উর্দ্ধ ত্রিকোণাকৃতি ম্যাট্রিক্স (Upper triangular matrics) ঃ যে বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের নীচে অবস্থানকারী প্রতিটি উপাদান শূন্য তাকে বলা হয় উর্দ্ধ ত্রিকোণকৃতি ম্যাট্রিক্স। যেমন—

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

(k) নিম্ন ত্রিকোণাকৃতি ম্যাট্রিক্স (Lower triangular matrics) ঃ যে বর্গাকার ম্যাট্রিক্স মুখ্য তির্যকের উর্ধাংশে অবস্থানকারী প্রতিটি উপাদান শূন্য তাকে বলা হয় নিম্ন ত্রিকোণাকৃতি ম্যাট্রিক্স। যেমন—

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

3.6 ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তর

যদি কোনো ম্যাট্রিক্সের সারিগুলো ও স্তম্ভগুলো স্থানান্তর ঘটে যেখানে প্রতিটি সারি স্তম্ভে রূপান্তরিত হবে এবং একই সাথে প্রতিটি স্তম্ভ তার সবকটি উপাদানসহ সারিতে সজ্জিত হবে তখন তাকে বলা হবে ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তর। যেমন—

যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$ হয় তবে স্থানান্তরিত A অর্থাৎ A′ হবে $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$ মূল ম্যাট্রিক্স A র স্থানান্তরিত রূপকে A^1 বা A^T হিসাবে চিহ্নিত করা। আর একটি উদাহরণ দেওয়া যাক।

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$ একটি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স হলে তার স্থানান্তরিত রূপ হবে $A' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}$

অর্থাৎ স্থানান্তরিত ম্যাট্রিক্সের ক্রম পরিবর্তিত হলো। মূল ম্যাট্রিক্সটির 3 টি কলাম ও দুটি সারি এবং স্থানান্তরিত ম্যাট্রিক্সের 3টি সারি ও দুটি কলাম।

আবার যদি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স হয় $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times1}$ $\quad A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{1\times3}$

উপরিউক্ত উদাহরণগুলো থেকে বোঝা যায় যে যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ হয় তাহলে $A' = [a_{ji}]_{m\times n}$ অর্থাৎ (m × n) ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তরিত ম্যাট্রিক্স হবে n × m ক্রমযুক্ত।

3.6.1 স্থানান্তরিত ম্যাট্রিক্সের ধর্ম ঃ

স্থানান্তর ম্যাট্রিক্সের ধর্মগুলি হলো ঃ

1. $(A')' = A$
2. $(A+B)' = A' + B'$
3. $(AB)' = B'A'$

প্রথম ধর্মটি অনুসারে যদি মূল ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তর ম্যাট্রিক্সকে পুনরায় স্থানান্তর করা যায় তাহলে মূল ম্যাট্রিক্সকেই ফিরে পাওয়া যায়। দ্বিতীয় ধর্মানুসারে দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগফলের স্থানান্তর হবে উক্ত ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের প্রত্যেকটির স্থানান্তরের যোগফল। যেমন ঃ

ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

তাহলে $(A+B)' = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

এবং $A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ও $B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

সুতরাং $A' + B' = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

তৃতীয় ধর্মানুসারে দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফলের স্থানান্তর ওই ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের বিপরীত ক্রমে লিখিত প্রত্যেকটির স্থানান্তর (The transpose of a product is the product of the transposes in reverse order).

উদাহরণ ঃ প্রদত্ত $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 29 & 68 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad \therefore (AB)' = \begin{bmatrix} 29 & 33 \\ 68 & 36 \end{bmatrix}$

$B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B'A' = \begin{bmatrix} 29 & 33 \\ 68 & 36 \end{bmatrix} \; \therefore (AB)' = B'A'$

3.7 বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverses)

কেবলমাত্র বর্গাকার ও ননসিঙ্গুলার (Non singular) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেই বিপরীত মুখী ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় যেখানে $AA^{-1} = I = A^{-1} A$ শর্তটি সাধিত হয়। কোনো ম্যাট্রিক্সকে তার বিপরীতমুখী ম্যাট্রিক্স দিয়ে গুণ করলে একক ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে। লক্ষণীয় যে A কে A^{-1} দিয়ে আগে বা পরে গুণ করলেও (pre or post multiply) একই একক ম্যাট্রিক্স প্রাপ্ত হয়।

3.7.1 বিপরীতমুখী ম্যাট্রিক্সের ধর্ম ঃ

(a) প্রত্যেকটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে না। অর্থাৎ বর্গাকৃতি একটি জরুরী শর্ত কিন্তু যথেষ্ট শর্ত নয়। বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, যদি কোনো বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে তাহলে সেই ম্যাট্রিক্সটি হবে নন সিঙ্গুলার। আবার যদি কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স না থাকে তাহলে তাকে সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

(b) যদি A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকে, তাহলে A ম্যাট্রিক্সকে বলা হবে A^{-1} ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ A এবং A^{-1} একে অপরের বিপরীতমুখী ম্যাট্রিক্স।

(c) যদি A র ক্রম $n \times m$ হয় তাহলে A^{-1} ও একটি $n \times m$ ক্রমবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স হবে।

(d) যদি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকে তাহলে সেটা অনন্য (unique) হবে। এই অনন্যতা নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

ধরা যাক A ম্যাট্রিক্সের বিপরীতমুখী ম্যাট্রিক্স হলো B, যাতে $AB = BA = I$

এখন ধরা যাক, C অপর একটি ম্যাট্রিক্স যেখানে $AC = CA = I$. এবার $AB = I$ এর উভয়পক্ষে C দিয়ে পূর্বে গুণ করা যদি যায় (premultiply) তাহলে হবে $CAB = CI(= C)$ যেহেতু $CA = I$ ধারনা অনুসারে হলো, অতএব $IB = C$ অথবা $B = C$ অর্থাৎ B ও C অবশ্যই এক এবং একই বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

(e) $AA^{-1} = I$ এবং $A^{-1}A = I$ একে অপরকে বোঝায় এমনভাবে যে দুটির মধ্যে যে কোনো একটি সমীকরণই A এবং A^{-1} এর মধ্যবর্তী বিপরীতমুখী ধর্ম নির্দেশের ক্ষেত্রে যথেষ্ট।

অর্থাৎ যদি $AA^{-1} = I$ হয়, এবং B একটি ম্যাট্রিক্স এমন হয় যেখানে $BA = I$, সুতরাং $B = A^{-1}$. এখন $BA = I$ এর উভয়পক্ষ A^{-1} দিয়ে উত্তরোত্তর গুণ (Post multiply) করলে হবে $(BA)A^{-1} = IA^{-1}$।

অথবা $B(AA^{-1}) = IA^{-1}$ (সহযোগী নিয়ম বা associative law)

$BI = IA^{-1}$ (AA^{-1}, ধারণানুযায়ী)

$\therefore\ B = A^{-1}$

একইভাবে এটা দেখানো যায় যে যদি $A^{-1}A = I$, তাহলে কেবলমাত্র একটি ম্যাট্রিক্স C যেখানে $CA^{-1} = I$ হবে, তা হলো $C = A$.

নিম্নলিখিত ধর্মগুলি খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

(E) যদি A ও B দুটি ননসিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স হয় যার ক্রম $n \times m$ তাহলে,

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

প্রথমটি অনুসারে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত হলো মূল ম্যাট্রিক্স। দ্বিতীয়টির অর্থ দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফলের বিপরীত হলো সেই দুই ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ক্রমে সজ্জিত (reverse order) বিপরীত ম্যাট্রিক্সের গুণফল। তৃতীয়টির অর্থ হলো স্থানান্তর ম্যাট্রিক্সের বিপরীত হলো সেই ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তর।

প্রথম ধর্মটি খুব সুস্পষ্ট। দ্বিতীয়টি নিম্নলিখিতভাবে প্রমাণ করা যায়।

ধরা যাক AB র বিপরীত ম্যাট্রিক্স C। সুতরাং $(AB)^{-1} = C$ ও $CAB = I$। যদি $B^{-1}\ A^{-1}$ দিয়ে উত্তরোত্তর গুণ করা যায়,

$$CAB\ B^{-1}A^{-1} = IB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad \text{........(1)}$$

এখন উপরিউক্ত সমীকরণটির বাঁদিকটি হলো $CA(BB^{-1})A^{-1} = CAI\ A^{-1} = CAA^{-1} = CI = C$

সুতরাং (1) টি এভাবে লেখা যায় $C = B^{-1}A^{-1}$ বা AB র বিপরীত ম্যাট্রিক্স হলো $B^{-1}A^{-1}$।

তৃতীয় ধর্মটি নিম্নলিখিত উপায়ে প্রমাণ করা যায় ঃ প্রদত্ত A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স যদি D হয়, তাহলে $DA' = I$ কিন্তু $(AA^{-1})' = I' = I$

$$\therefore DA' = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A'$$

উভয়পক্ষকে $(A')^{-1}$ দিয়ে উত্তরগুণ করে পাই ঃ

$$DA' = (A')^{-1} = (A^{-1})'A'(A') = 1$$

অর্থাৎ $D = (A^{-1})'$ ।

3.8 সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স

কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের স্থানান্তর ম্যাট্রিক্সকে A এর অ্যাডজয়েন্ট বা সংলগ্ন ম্যাট্রিক্স বলা হয়। একে adj A হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

তাহলে $\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

দ্রষ্টব্য ঃ A. adj A = adj A.A = det A.I.

3.9 বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করার সূত্র

আমরা জানি ঃ A. adj A = adj A . A = det A . I

অথবা $A.\left(\frac{\text{adj } A}{\det A}\right)=\left(\frac{\text{adj } A}{\det A}\right)A=I$

সুতরাং $A^{-1}=\frac{\text{adj } A}{\det A}$ $(\det A \neq 0)$

উদাহরণ ঃ যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ হয় তাহলে A^{-1} নির্ণয় করো।

$\det A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ = 1(1 – 2) – 2 (2 + 1) + 3 (4 + 1) = –1 – 6 + 15 = 8 ≠ 0

সুতরাং A^{-1} এর অস্তিত্ব পাওয়া যাবে।

$$A'=\frac{\text{adj } A}{\det A}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 4 & -1\\ -3 & 4 & 5\\ 5 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

উদাহরণ 2) যদি $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -5\\ -2 & 4 & 5\\ 5 & -4 & -3\end{bmatrix}$ হয় তাহলে A^{-1} নির্ণয় করো।

এক্ষেত্রে $A_{3\times 3}$ স্পষ্টতই একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স।

$|A|=4\left[3\times 4-1(-1)\right]-1\left[(-2)(4)-1(3)\right]+(-5)\left[(-2)(-1)-3(3)\right]$

= 52 + 11 + 35 = 98 = 0

সুতরাং A হলো একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non singular matrix)

এবার A এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স C হলো

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -5\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 1\\ -3 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 1 & 16\\ 11 & 31 & 6\\ -7 & 7 & 14\end{bmatrix}$$

C এর স্থানান্তর বা রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স হলো adj A = $C' = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

সুতরাং $A^{-1} = \dfrac{\text{adj A}}{\det A} = \dfrac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1327 & 0.0102 & 0.1633 \\ 0.1122 & 0.3163 & 0.0612 \\ -0.0714 & 0.0714 & 0.1429 \end{bmatrix}$

3.10 বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে রৈখিক সমীকরণের সমাধান

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে ম্যাট্রিক্স সমীকরণ সমাধান করা যায়। যদি $A_{n\times n}\ X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ এবং A^{-1} এর অস্তিত্ব থাকে, তাহলে সমীকরণটির উভয় পক্ষকে A–1 দিয়ে পূর্বগুণণ দরে পাওয়া যায় $A^{-1}{}_{n\times n}\ A_{n\times n}\ X_{n\times 1} = A^{-1}{}_{n\times n}\ B_{n\times 1}$

এখন $A^{-1}A = I \quad \therefore I_{n\times n}\ X_{n\times 1} = A^{-1}{}_{n\times n}\ B_{n\times 1}$

বা $IX = X \quad \therefore X_{n\times 1} = \left(A^{-1}B\right)_{n\times 1}$

সুতরাং সমীকরণের সমাধান হলো সহগ ম্যাট্রিক্স A র বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও কলাম ভেক্টর B (ধ্রুবক) এর গুণফল।

উদাহরণ ঃ তিনটি সম্পর্কযুক্ত বাজারের সাম্যবস্থার সমীকরণ প্রদত্ত হলো ঃ

$11P_1 - P_2 - P_3 = 31$
$-P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26$
$-P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24$

তিনটি বাজারের তিনটি দাম, P_1, P_2, P_3 নির্ণয় করো।

সমীকরণত্রয়কে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে পাই ঃ

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$|A| = 11(38) + 1(-9) - 1(8) = 401$

কোফ্যাক্টর ম্যাট্রিক্স $C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{401}\begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38/401 & 9/401 & 8/401 \\ 9/401 & 76/401 & 23/401 \\ 8/401 & 23/401 & 65/401 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{38}{401} & \frac{9}{401} & \frac{8}{401} \\ \frac{9}{401} & \frac{76}{401} & \frac{23}{401} \\ \frac{8}{401} & \frac{23}{401} & \frac{65}{401} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1178+234+192}{401} \\ \frac{279+1976+552}{401} \\ \frac{248+598+1560}{401} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1{}^* \\ P_2{}^* \\ P_3{}^* \end{bmatrix}$$

সুতরাং $P_1{}^* = 4$, $P_2{}^* = 7$, $P_3{}^* = 6$.

উদাহরণ ঃ প্রদত্ত $Y = C + Io$ যেখানে $C = Co + bY$ বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সাম্যাবস্থা Y ও C এর মান নির্ণয় করো।

$Y = C + Io \qquad \therefore\ Y - C = I_o$

$C = Co + bY \qquad \therefore\ -bY + C = C_o$

সুতরাং $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_o \\ C_o \end{bmatrix}$

সহগ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক হলো ঃ $|A| = 1(1) + 1(-b) = 1 - b$

কোফ্যাক্টর ম্যাট্রিক্স $C = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

ধরা যাক $X = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} \ \therefore\ X = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_o \\ C_o \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} I_o + C_o \\ bI_o + C_o \end{bmatrix}$

$\therefore\ Y^* = \frac{1}{1-b}(I_o + C_o) \qquad C^* = \frac{1}{1-b}(C_o + bI_o)$

3.11 ক্রেমার নিয়মের পদ্ধতিতে ম্যাট্রিক্সের সমাধান

রৈখিক সমীকরণ সিস্টেমের, নির্ণায়কের মাধ্যমে সমাধান, ক্রেমার নিয়মের অনুসরণে সহজেই করা যায়। ক্রেমার নিয়ম অনুসারে ঃ , যেখানে xi হলো ith অজানা চলক, একটি সারিবদ্ধ সমীকরণের (series of equation) |A| = সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক, এবং |Ai| হলো একটি বিশেষ ধরনের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

যা গঠিত হয়েছে মূল সহগ ম্যাট্রিক্সের xi এর সহগের স্তম্ভের, ধ্রুবকের কলাম ভেক্টর দ্বারা প্রতিসরণের ফলে। (|Ai| is the determinant of a special matrix formed from the original coefficient matrix by replacing the column of coefficient of xi with the column vector of constants). নিম্নলিখিত উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টিকে পরিষ্কারভাবে বোঝা যাবে।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সারি থেকে ক্রেমার নিয়মের সাহায্যে x_1, x_2, ও x_3 এই তিন অজানা চলকের মান নির্ণয় করো।

$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 15$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5$
$6x_1 + 5x_2 + x_3 = 28$

সমীকরণের সারি তিনটিকে $Ax = b$ আকারে প্রকাশ করলে হয় ঃ

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 28 \end{bmatrix}$$

যেখানে $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 28 \end{bmatrix}$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

যেখানে A_1 হলো ম্যাট্রিক্স A র প্রথম স্তম্ভটি, b কলাম ভেক্টরের মাধ্যমে প্রতিস্রুত হয়েছে।

অর্থাৎ $A_1 = \begin{bmatrix} 15 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \\ 28 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

এইভাবে $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 6 & 28 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 6 & 5 & 28 \end{bmatrix}$

এখন $|A| = 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-13) - 9 + 6(5) = -5$

$|A_1| = 15(-13) + 5(9) + 28(5) = -10$

$$\therefore x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$|A_2| = -15(-11) -5(8) -28(5) = -15$

$$\therefore\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-5} = 3$$

$x_3 = |A_o|/|A|$ যেখানে $A_3 = 15(23) + 5(-14) + 28(-10) = -5$

$$\therefore\ X_o = \frac{-5}{-5} = 1 \text{ সুতরাং } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

সহগ এবং অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স (Coefficient and Augmented Matrix) :

কোনো সহ-সমীকরণ পদ্ধতিতে বিবেচনাধীনচলক সমূহ সহগ নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স গঠন করা যায় তাকে সহগ ম্যাট্রিক্স বলে। সাধারণত একে 'A' চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

অপরপক্ষে সহগ ম্যাট্রিক্স এবং সহ সমীকরণের ডানদিকের স্থির রাশির সমন্বয়ে যে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাকে অগমেটেড ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $2x + 6y - 5 = 0$

$6x - 2y + 8 = 0$

এক্ষেত্রে x এবং y এর সহগ নিয়ে গঠিত A ম্যাট্রিক্স হবে ঃ

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ A হলো সহগ ম্যাট্রিক্স।

আবার x ও y এর সহগ এবং ধ্রুবক রাশির সমন্বয়ে গঠিত B ম্যাট্রিক্স হলো ঃ

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ B হলো একটি অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স।

3.12 একাত্ববোধক এবং অ-একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স

যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হয় তাকে একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন—

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ এক্ষেত্রে $|A| = 5 \times 3 - 5 \times 3 = 15 - 15 = 0$

আবার যে ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে নির্ণায়ক শূন্য হয় না তাকে অ একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $|A| = 20 - 16 = 4 \neq 0$

একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে যেহেতু $|A| = 0$ সেহেতু ম্যাট্রিক্সটির অন্ততঃপক্ষে দুটি সারি বা দুটি স্তম্ভের মধ্যে রৈখিক নির্ভরতার (linear dependence) অস্তিত্ব আছে। সেক্ষেত্রে উক্ত সমীকরণ সিরিজের সামগ্রিকভাবে অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে বা কোনো একক সমাধান সম্ভব হবে না।

কিন্তু অ একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $|A| = 0$ হওয়ায় সারি বা স্তম্ভগুলি রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং একক সমাধান সম্ভব।

3.13 মাইনর এবং কো ফ্যাক্টর

যে কোনো একটি ম্যাট্রিক্স A র মাইনর হলো এমন একটি সাবম্যাট্রিক্স (submatrix) যা গঠিত হয়েছে উক্ত ম্যাট্রিক্সটি 'i' সারি ও 'j' কলাম অপসারিত করে বাকী উপাদান সহযোগে গঠিত নির্ণায়কের মাধ্যমে। নিম্নের উদাহরণের সাহায্যে ধারণাটি সুস্পষ্ট করা যাবে।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

এখানে a_{11} এর মাইনর M_{11} হবে ঃ

$$|M_{11}| = \begin{bmatrix} -a'_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

একইভাবে $|M_{12}| = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a'_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ হলো a_{12} র মাইনর।

$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ হলো a_{13} র মাইনর।

এই হিসেবে $|A| = a_{11}\ |M_{11}| + a_{12}(-1)|M_{12}| + a_{13}\ |M_{13}|$

কোফ্যাক্টর $|C_{ij}|$ হলো পূর্বনির্দেশিত চিহ্ন দ্বারা প্রকাশিত মাইনর। এই চিহ্নের নিয়ম হলো

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}\ |M_{ij}|$$

অর্থাৎ যদি সাবস্ক্রিপ্টগুলির যোগফল জোড় সংখ্যা হয়, তাহলে $|C_{ij}| = |M_{ij}|$, যেহেতু (-1) যখন জোড় সংখ্যার ঘাতে নির্ণয় করা হবে তা ধনাত্মক হবে। আবার $i + j$ যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে তাহলে $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$ হবে যেহেতু (-1) যখন বিজোড় ঘাতে নির্ণীত হবে তখন তা ঋণাত্মক হবে।

উদাহরণ 1 ঃ যদি $A\begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে দ্বিতীয় সারির মাইনর ও কোফ্যাক্টর (সহগুণক) নির্ণয় কর ঃ

$$A\begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$$

মাইনর দুটি হলো $|M_{21}| = 17$; $|M_{22}| = 13$

পদ্ধতি $A = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19- & -15 \end{bmatrix}$ $|M_{21}| = 17$

আবার $A = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ -19- & -15 \end{bmatrix}$

সহগুণক বা কোফ্যাক্টরের নিয়মানুসারে ঃ

$$\left|C_{21}\right| = (-1)^{2+1} \mid M_{21} \mid = -1(17) = -17$$

$$\left|C_{22}\right| = (-1)^{2+2} \mid M_{22} \mid = +1(13) = 13$$

উদাহরণ 2 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে দ্বিতীয় কলামের মাইনর ও সহগুণকগুলি নির্দেশ করো ঃ $|M_{12}| = 12$ $\qquad$ $|M_{22}| = 6$

$|C_{12}| = (-1)^{1+2}$ $\qquad$ $|M_{12}| = -12$

$|C_{22}| = (-1)^{2+2}$ $\qquad$ $|M_{22}| = 6.$

2. ম্যাট্রিক্সের শর্তসমূহ ঃ

১। নির্ণয় শর্ত (Determinative property) ঃ A = B, এটার মাধ্যমে, যে কোনো দুটি ম্যাট্রিক্স সমান না অসমান তা বলা যায়। যেমন A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স A = B বলা যাবে যখন উভয়েই সমান হবে।

২। নমনীয় শর্ত (Refluxive Property) ঃ প্রত্যেক ম্যাট্রিক্স তার নিজ ম্যাট্রিক্সের সমান হয়ে থাকে। অর্থাৎ A = A বা B = B ইত্যাদি।

৩। সমতার শর্ত (Symmetric Property) ঃ কোন প্রথম ম্যাট্রিক্স (Leading matrix) যদি দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স (log) এর সমান হয় তবে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সও প্রথমটির সমান হবে। অর্থাৎ A = B হলে, B = A হবে।

৪। অবস্থানান্তর শর্ত (Transiturity Property) ঃ প্রথম ম্যাট্রিক্স যদি দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সমান হয় এবং ম্যাট্রিক্স যদি তৃতীয় ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তাহলে তৃতীয় ম্যাট্রিক্সটি অবশ্যই প্রথমটির সমান হবে। অর্থাৎ A = B, B = C হলে C = A হবে।

3. ম্যাট্রিক্সের কার্যক্রম (Operations on Matrics) ঃ ম্যাট্রিক্সের কার্যক্রম বা ক্রিয়াকলাপ বলতে মূলতঃ ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ, গুণণ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান নির্দেশ করে। ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে কিছু নিয়ম আছে যাদের ম্যাট্রিক্স কার্যক্রম ব্যবহারের মৌলিক নিয়ম বলা হয়।

3.14 ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ

দুটি ম্যাট্রিক্সকে যোগ করলে অনেক সময় অন্য একটি ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স দুটির পরিধি সমান হওয়া প্রয়োজন। অর্থাৎ ওই দুই ম্যাট্রিক্সের সারি এবং স্তম্ভের সংখ্যা সমান হতে হয়। যোগের সময়ে একটি ম্যাট্রিক্সের একটি উপাদানের সঙ্গে অপর ম্যাট্রিক্সের প্রতিষঙ্গিক (corresponding)

উপাদানের সঙ্গে যোগ করি। একটি ম্যাট্রিক্স থেকে অপর একটি ম্যাট্রিক্স বিয়োগের সময় একইভাবে একটি উপাদান থেকে অপর উপাদান বিয়োগ করি।

উদাহরণ ১। $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

তাহলে A+B $= \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-)4 & 3+5 \\ -4+5 & 5+2 & 6+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

উদাহরণ ২। $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

তাহলে $A - B = \begin{bmatrix} 4-3 & 5-1 & -2-4 \\ 3-1 & -2-2 & -1-3 \\ 4-(-1) & 3-2 & 2-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

ম্যাট্রিক্সের যোগ পদ্ধতিতে পরিবর্তনশীলতা (Commulative) এবং সহযোগ (associative) নীতি মেনে চলা হয়। এজন্য দুটি ম্যাট্রিক্সকে যখন আমরা যোগ করি, তখন তাদের প্রাতিষঙ্গিক উপাদান যোগ করাকেই নির্দেশ করে।

3.14.1 পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commulative Law) :

এই নীতি অনুসারে যদি A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A + B = B + A হয়।

3.14.2 সহযোগ নীতি (Associative law) :

এই নীতি অনুযায়ী যদি A, B ও C তিনটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে (A+B)+C = A + (B+C) হয়

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 11 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 11 & 10 \\ 8 & 9 & 14 \\ 8 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

এবং $A+(B+C) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 11 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 11 & 10 \\ 8 & 9 & 14 \\ 6 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

$\therefore$ (A + B) + C = A + (B + C)

3.15 ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণন

কোনো স্কেলার দ্বারা কোনো ম্যাট্রিক্সকে গুণ করা হলে এর প্রতিটি উপাদানকে ঐ স্কেলার দ্বারা গুণ করা বোঝায়। একে ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণন বলা হয়। যদি A একটি m × n ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে তার স্কেলার গুণন KA, যেখানে একটি স্কেলার বা স্থির রাশি, একটি m × n ম্যাট্রিক্সই হবে। অর্থাৎ যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ হয় তাহলে $KA = [Ka_{ij}]_{m\times n}$ হবে।

যেমন ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ হয় তবে $5A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$ হবে যেখানে K = 5.

যদি k এবং g দুটি স্কেলার এবং A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স হয় তবে ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণনের সময়ে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি প্রযোজ্য হবে ঃ

(i) K(A+B) = KA + KB

(ii) (K+g)A = KA + gA.

3.16 ম্যাট্রিক্সের গুণন

অনেক সময় দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করলে একটি ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। এই গুণনের সময় প্রথম ম্যাট্রিক্সের সারির সঙ্গে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের কলাম, উপাদান অনুসারে গুণ করে, তাদের যোগফল দিতে হবে। এক্ষেত্রে এই গুণন তখনই সম্ভব যদি একটি ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা অপরটির সারির সংখ্যার সমান হয়।

অর্থাৎ যদি এবং দুটি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স হবে তবে AB তখনই সংজ্ঞায়িত হবে যদি A র কলামের সংখ্যা (= p) B এর সারির সংখ্যা (= p) সমান হবে। যদি A একটি m × n ম্যাট্রিক্স হয় ও B একটি n × p ম্যাট্রিক্স হয় তবে AB একটি m × p ম্যাট্রিক্স হবে। যেমন $[A_{3\times4}]\times[B_{4\times2}] = [AB]_{3\times2}$ কিন্তু $[A_{23}]\times[B_{2\times4}]$ সম্ভব হবে না।

গুণ করার নিয়ম ঃ

(i) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সঙ্গে B ম্যাট্রিক্সের প্রথম স্তম্ভ।

(ii) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সঙ্গে B ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় কলাম।

(iii) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সঙ্গে B ম্যাট্রিক্সের তৃতীয় কলাম ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে AB নির্ণয় করো।

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} -9 & -16 & -3 \\ 37 & 12 & 5 \\ -18 & 12 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

অর্থাৎ যদি R_1, R_2, ..., R_m, A ম্যাট্রিক্সের যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ..., m তম সারি হয় এবং C_1, C_2, ..., C_n যথাক্রমে B ম্যাট্রিক্সের প্রথম দ্বিতীয় ও n তম স্তম্ভ হয়, এবং RiCi = Ri ও Ci এর প্রাতিযঙ্গিক উপাদানগুলির গুণপরবর্তী যোগফল ও তাহলে

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \times [C_1 \;\; C_2 \, ...C_n] = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & ...... & R_1C_n \\ R_2C_1 & R_2C_2 & ...... & R_2C_n \\ ...... & ...... & & .... \\ R_mC_1 & R_mC_2 & ...... & R_mC_n \end{bmatrix}$$

3.16.1 ম্যাট্রিক্স গুণনের নীতি (Principles of Matrix Multiplication) :

ম্যাট্রিক্সের গুণের বেলায় পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commulative law) এবং সহযোগ নীতি (associative law) প্রযোজ্য। অনেক ক্ষেত্রে বণ্টনের নিয়মও (dis tributive law) প্রযুক্ত হয়।

(ক) ম্যাট্রিক্স গুণনের পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commutive law of Multiplication) : দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণন প্রক্রিয়া সব সময় তাদের পরিবর্তনশীল গুণের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নাও হতে পারে। A ও B যদি দুটি ম্যাট্রিক্স হয় তখন $AB \neq BA$ হতে পারে। অনেক সময় AB সজ্ঞায়িত করণ সম্ভব কিন্তু BA নয়। আবার অনেক ক্ষেত্রে AB ও BA দুটিই সংজ্ঞায়িত হলেও $AB \neq BA$ হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

কিন্তু $$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 27 & 40 \end{bmatrix} \therefore\ AB \neq BA$$

যদি A ও B ম্যাট্রিক্সের মধ্যে যে কোনো অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তখন AB = BA হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ AB = BA ; সুতরাং IA = AI = A হচ্ছে।

(খ) গুণের সহযোগ নীতি (Associative Law) : যদি A, B ও C এই তিনটি ম্যাট্রিক্স হয় তবে গুণের সহযোগ নীতি অনুসারে ঃ AB(C) = A(BC) এক্ষেত্রে AB এবং BC এই গুণোত্তর ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে অবশ্য গুণের নিয়ম পূরণ হতে হবে। A যদি m×n এবং C যদি p×q ক্রমযুক্ত ম্যাট্রিক্স হয় তবে গুণের প্রক্রিয়া প্রয়োগ করতে হলে B ম্যাট্রিক্স অবশ্যই n×p ক্রমের হতে হবে। এক্ষেত্রে ABC দ্বারা গঠিত যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে, তা হবে m × q ক্রম বিশিষ্ট।

উদাহরণ ঃ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$ $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{3\times2}$

সমাধান ঃ $AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}-4 & 9 & 7\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}_{2\times3}$

$$AB(C)=\begin{bmatrix}-4 & 9 & 7\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}44 & 17\\ 8 & -6\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$AB(C)=\begin{bmatrix}-4 & 9 & 7\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44 & 17\\ 8 & -6\end{bmatrix}_{2\times2}$$

সুতরাং AB(C) = A(BC) প্রমাণিত।

(গ) ম্যাট্রিক্সের গুণনের ক্ষেত্রে বণ্টনের নীতি (Distributive Law) : এই নীতি অনুসারে

A(B+C) = AB + AC

(B+C)A = BA + CA

এক্ষেত্রে গুণের এবং যোগের শর্ত পূরণ হওয়া আবশ্যক।

উদাহরণ ঃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

সুতরাং $(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 14 & 11\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 11 & 12\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{bmatrix}5 & -6\\11 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -5\\14 & 11\end{bmatrix}$$

অর্থাৎ A(B + C) = AB + BC প্রমাণিত।

একইভাবে (B + C) A = BA + CA প্রমাণ করা সম্ভব, আরো কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে ম্যাট্রিক্সের কার্যক্রম দেখানো হল।

উদাহরণ (১) যদি $A=\begin{bmatrix}9 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\7 & 12\end{bmatrix}$ হয় তাহলে 3A + 5B + x = 0 থেকে x এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর ঃ প্রদত্ত 3A + 5B + x = 0

$$\therefore\ x = -3A - 5B$$

$$=-3\begin{bmatrix}9 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 5\\7 & 12\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}27 & 3\\12 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 25\\35 & 60\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}27+5 & 3+25\\12+35 & 9+60\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}32 & 28\\47 & 69\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x=\begin{bmatrix}-32 & -28\\-47 & -69\end{bmatrix}$$

(২) $f(x) = x^2 - 5x + 4I$ এবং $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ হলে f(B) এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $B^2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4+0+2 & 0-0+0 & 4+0+0\\0-0+1 & 0+1+0 & 0-1+0\\2+0+0 & 0-0+0 & 2+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$f(B) = B^2 - 5B + 4I=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\\7 & 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0 & 10\\0 & -5 & 5\\5 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6-10+4 & 0-0+0 & 4-10+0 \\ 1-0+0 & 1+5+4 & -1-5+0 \\ 2-5+0 & 0-0+0 & 2-0+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 10 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(৩) কোনো একটি দোকানের তিন দিনের বিভিন্ন প্রকার ব্র্যান্ডের কলম বিক্রয়ের তথ্য নিচের সারণীতে দেওয়া হলো ঃ

	ব্র্যান্ডবিশেষে কলমের সংখ্যা			
দিন	**ব্র্যান্ড A**	**ব্র্যান্ড B**	**ব্র্যান্ড C**	**ব্র্যান্ড D**
প্রথম দিন	3	4	10	20
দ্বিতীয় দিন	2	3	15	20
তৃতীয় দিন	1	5	12	14
প্রতি কলমে লাভ (টাকায়)	0.50	0.75	0.50	0.40

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দোকানের তিন দিনের লাভ নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $P=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{bmatrix}$; $Q=\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{bmatrix}$

সুতরাং মোট লাভ = $P \times Q$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.50+3+5+8 \\ 1+2.25+7.5+8 \\ 0.50+3.75+6+5.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17.5 \\ 18.75 \\ 15.85 \end{bmatrix}$$

3.17 প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

যে ম্যাট্রিক্সকে সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে রূপান্তর করলে আদি ম্যাট্রিক্সটির কোনো পরিবর্তন হয় না তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের রূপান্তর ম্যাট্রিক্স একই হলে বা $A' = A$ হলে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে। এক্ষেত্রে $a_{ij} = a_{ji}$ হবে।

3. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew by numetric Matrix) : যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের অনুভূমিক সারির উপাদান (row) এবং উল্লম্ব সারির উপাদানসমূহ একই মানের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় এবং প্রধান কৌণিক উপাদান সমূহের মান শূন্য হয় তবে ঐ ম্যাট্রিক্সকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে। এক্ষেত্রে $a_{ij} = -a_{ji}$ যখন $i = j$ এবং $a_{ij} = 0$ যখন $i = j$।

উদাহরণ (১) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স হয় তবে একে প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করো।

সমাধান ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}; A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ (২) দেখাও যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে একটি প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

সমাধান ঃ $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A') = B + C$

$$B = \frac{1}{2}(A + A') \ \ B' = \frac{1}{2}(A' - A) = \frac{1}{2}(A + A') = B$$

সুতরাং B হলো একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

$$C = \frac{1}{2}(A - A') \ \therefore \ C' = \frac{1}{2}(A' - A) = -\frac{1}{2}(A - A') = -C$$

সুতরাং C হলো একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

3.18 সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

একই ম্যাট্রিক্সকে বার বার গুণ করার ফলে গুণফল যদি আদি ম্যাট্রিক্স হয় তখন সেই ম্যাট্রিক্সকে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix) বলা হয়। অর্থাৎ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য A.A = A হলে তাকে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ কি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স?

সমাধান ঃ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = A$

অর্থাৎ প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সটি একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

3. অর্থগোনাল ম্যাট্রিক্স (Orthogonal Matrix) : যদি কোনো ম্যাট্রিক্সকে তার রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স A′ দ্বারা গুণ করার ফলে গুণফল যদি একক ম্যাট্রিক্স হয় অথবা যদি কোনো রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স তার বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তবে তাকে অর্থগোনাল ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এক্ষেত্রে $AA' = I$ অথবা $A' = A^{-1}$ হবে।

উদাহরণ ঃ যদি হয় তবে $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ কি একটি অর্থোগোনাল ম্যাট্রিক্স ?

সমাধান ঃ $AA' = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

সুতরাং A একটি অর্থগোনাল ম্যাট্রিক্স।

3.19 ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক

সর্বোচ্চ সংখ্যক রৈখিকভাবে স্বাধীন সারি বা কলামকে কোনো ম্যট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক বলা হয়। একটি $n \times n$ বর্গ ম্যাট্রিক্সকে ধরা যাক যার র‍্যাঙ্ক f(A) হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

যদি $f(n) = n$ হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সের সারির বা কলামের উপাদানসমূহের মধ্যে কোনোরূপ রৈখিক নির্ভরশীলতা (linear dependence) থাকবে না। A হবে অএকাত্ববোধক (Non singular)।

যদি $f(a) < A$ হয় তবে সারি কলামগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হবে ও ম্যাট্রিক্সটি একাত্ববোধক হবে।

উদাহরণ ১। ধরা যাক $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক কত?

সমাধান ঃ $|A| = -3\ [10 - (-32)] - 6\ (2 - 16) + 2\ (-8 - 20) = -98$

যেহেতু $|A| \neq 0$ সুতরাং A হলো একটি অ-একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স এবং তিনটি সারি এবং তিনটি কলামই রৈখিকভাবে স্বাধীন। $\therefore$ $f(A) = 3.$

উদাহরণ ২। $B = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 3 \\ 2 & 12 & -4 \\ -3 & 18 & 6 \end{bmatrix}$

সমাধান ঃ $|B| = 5[72 - (+72)] + 9\ [12 - (+12)] + 3[36 - (-36)] = 0$

যেহেতু $|B| = 0$ সুতরাং B একটি একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স, যার তিনটি সারি এবং কলাম রৈখিকভাবে স্বাধীন নয়। $\therefore\ f(B) = 3.$

এবার দেখা যাক যে কোনো দুটি সারি বা কলামের ক্ষেত্রে রৈখিক স্বাধীনতা আছে কিনা। যদি A ম্যাট্রিক্সের বাঁদিকের উপরের কোণ বরাবর 2×2 সহম্যাট্রিক্স নেওয়া যায় (sub matrix) এবং তার নির্ণায়ক গণ্য করা যায় তবে তা হলো ঃ

$$\left|B_1\right| = \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 78 \neq 0 \text{ সুতরাং } f(B) = 2.$$

সুতরাং A ম্যাট্রিক্সে দুটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সারি বা কলাম আছে। লক্ষ্য করলে দেখা যায় তৃতীয় সারি হলো, দ্বিতীয় সারির –1.5 গুণ ও তৃতীয় কলাম হলো দ্বিতীয় কলামের $-\frac{1}{3}$ গুণ।

3.20 ইনপুট আউটপুট বিশ্লেষণ

আধুনিক অর্থনীতিতে কোনো দ্রব্যের উৎপাদন অনেক দ্রব্যকে উৎপাদক হিসাবে ব্যবহার করে, যাকে গণ্য করা হয় মধ্যবর্তী উৎপাদক হিসাবে। যেমন ইস্পাত (steel) তৈরি করতে কয়লা লাগে, লৌহ-আকরিক লাগে, বিদ্যুৎ লাগে ইত্যাদি। এরাই হলো মধ্যবর্তী উৎপাদক (intermediate goods) তাহলে এই উৎপাদনের মোট চাহিদা হবে যে সমস্ত উৎপাদনক্ষেত্রে এই দ্রব্যটি মধ্যবর্তী উৎপাদক হিসাবে ব্যবহৃত হচ্ছে এবং এই দ্রব্যটির জন্য ভোক্তার চাহিদার সমান।

ধরা যাক অর্থনীতিতে n সংখ্যক উৎপাদনক্ষেত্র আছে এবং যেখানে $\bar{C}_1, \bar{C}_2, ...\ \bar{C}_n$ ভোগ্যদ্রব্য উৎপাদন করতে হবে। অর্থাৎ, হলো যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও ক্রমান্বয়ে n^{th} দ্রব্যের সর্বশেষ চাহিদা।

ধরা যাক $x_1, x_2, ..., x_n$ হলো n সংখ্যক দ্রব্যের মোট উৎপাদনের পরিমাণ (gross output)। এখন প্রশ্ন হলো কি পরিমাণ $x_1, x_2, ..., x_n$ উৎপাদন করতে হবে যাতে এদের মধ্যবর্তী উৎপাদক হিসাবে ব্যবহারের পর যে অবশিষ্ট পরিমাণ থাকবে তাতে সম্পূর্ণভাবে $\bar{C}_1, \bar{C}_2, ...\ \bar{C}_n$ পরিমাণ প্রদত্ত চাহিদা পূরণ করা যাবে, যেখানে কোনো ঘাটতি বা অতিরিক্ত ধারণ ক্ষমতা থাকবে না। (No deficit, No excess capacity solution)।

ধরা যাক a_{ij} হলো i তম ক্ষেত্রের উৎপাদন যা ith উৎপাদনক্ষেত্রে উৎপাদক হিসাবে ব্যবহার করা যাবে। তাহলে x_i এই উৎপাদনের বিভিন্ন ক্ষেত্রে মোট ব্যবহার ও তার ভোক্তার প্রদত্ত চাহিদার যোগফল হবে ঃ

$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + c_i$ সকল $i = 1, 2, ..., n$ এর জন্য।

অর্থাৎ $$x_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + \bar{c}_1$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + \bar{c}_2$$

$$x_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + \bar{c}_n \qquad .....(1)$$

(1) এর প্রত্যেকটি সারি প্রাতিষঙ্গিক দ্রব্যের সর্বশেষ বিন্যাস নির্দেশ করে। (Each row in (1) specifies the final dispoisition of the corresponding commodity) আবার 'i' তম কলাম ইনপুট ভেক্টর নির্দেশ করে।

যেখানে i কলামের প্রকাশ (entrix) হবে $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ সমস্যাটি বিশদভাবে বোঝানোর জন্য নিচের সারণীটি দেওয়া হলো।

$$\begin{array}{llll} & x_1 & x_2 & C \\ \hline x_1 \rightarrow 200 = & 50 + & 30 + & 120 \\ x_2 \rightarrow 200 = & 30 + & 20 + & 150 \end{array}$$

এক্ষেত্রে দুটি দ্রব্যেরই মোট উৎপাদন হলো 200 একক। x_1 এর সর্বশেষ প্রদত্ত চাহিদা 120 ও x_2 এর 150। উপরের যে তালিকা (box) তাতে আভ্যন্তরীণ ক্ষেত্রগুলির উৎপাদকের চলাচল (inter industry flow) হলো x_{ij} : 50 একক x_i ; 200 একক x_i তৈরী করতে নিজ ব্যবহারে কাজে লাগায়, x_i এর 30 একক প্রয়োজন হয় 200 একক x_2 উৎপাদনের, উৎপাদক হিসাবে। সুতরাং x_1 এর কলাম ভেক্টর হলো $\begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$ একে বলা হয় $x_1 = 200$ এর ইনপুট ভেক্টর। আবার একইভাবে $x_2 = 200$ র ইনপুট ভেক্টর হলো $\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$।

এই আলোচনায় ব্যবহার করা হয় লিন্তনটিয়েফের (Leontief) স্থির সহগযুক্ত প্রযুক্তির ধারণা। (Leontief assumption of fixed coefficient technology)। এই ধারণানুসারে যে হারে উৎপাদকগুলি অন্য ক্ষেত্রে যুক্ত বা ব্যবহৃত হয় তা ধ্রুবক এবং অপরিবর্তনশীল থাকবে, উক্ত ক্ষেত্রের উৎপাদনের পরিমাণ নির্বিশেষে। (The proportions in which the inputs are combined in any sector are fixed and unchanged, whatever the level of output is that factor)।

যে উদাহরণটি সারণীটিতে দেওয়া হয়েছে তার হিসাবে $50x_1$ লাগে $200x_1$ উৎপাদন করতে। অর্থাৎ হলো নির্দিষ্ট হার, x_1 এর যে পরিমাণই তৈরী হোক না কেন এই হার একই থাকবে। আবার $30x_2$ প্রয়োজন হচ্ছে 200 x_1 তৈরীর জন্য, সুতরাং 3/20 হলো x2 র সাপেক্ষে ধ্রুবক হার। এক্ষেত্রে এই স্থির সহগর ভিত্তিতে প্রযুক্তিটি সমহার উৎপাদন স্কেল নির্দেশ করবে। (Constant returns to scale production relation of fixed coefficient variety)।

সুতরাং $\quad x_{ij} = c_{ij}\, x_j.$

অথবা $\quad x_{ij}/x_j = a_{ij} \qquad ...... (2)$

a_{ij} হলো এক একক i_{th} দ্রব্য উৎপাদন করতে যে পরিমাণ ‘i’ তম দ্রব্যের ইনপুট হিসাবে ব্যবহৃত হবে তার পরিমাণ।

এখন (2) কে (1) এ বসালে পাই

$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + C_1$

$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n + C_2$

$\vdots$

$x_n = an_1x_1 + an_2x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n + C_n$ ......(3)

ম্যাট্রিক্স হিসাবে প্রকাশ করলে হবে ঃ

$x = Ax + C$ .....(4)

যেখানে $x = \begin{pmatrix} 4 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{n\times1}$ $\bar{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_n \end{bmatrix}_{n\times1}$

এবং $A = \{aij\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

এখানে A একটি অ-ঋণাত্মক (non-negative) বর্গম্যাট্রিক্স সমীকরণ (4) নির্দেশ করে একটি n সংখ্যক অসমজাতীয় রৈখিক সমীকরণের (non homogeneous lines equation) সেটকে যেখানে n সংখ্যক অজানা চলকের সমাধান হবে যখন $|I - A| = 0$ হবে।

সমীকরণ (4) কে লেখা যায় ঃ $x - Ax = \bar{C} \Rightarrow (I - A)x = \bar{C}$

যাতে $x = [I - A]^{-1}\bar{C}$ ......(5)

এবার x যদি অঋণাত্মক হয় তবে $X \geq 0$ অর্থাৎ $(I - A)^{-1} C \geq 0$ $[I - A]$ এই ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় লিওনটিয়েক ম্যাট্রিক্স।

এবার দেখা যাক কোন শর্ত অবলম্বন করলে $x > 0$ হবে। ধরা যাক দুটি ক্ষেত্র যেখানে

$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c1$

$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c2$ ....(6)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ অথবা $\begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix}$ ক্রেমার নিয়মে সমাধান করলে দেখা যাবে ঃ

উভয়ক্ষেত্রেই বন্ধনীর মধ্যের উপাদান (litrous) অঋণাত্মক হবে যতক্ষণ পর্যন্ত $a_{ii} \leq 1$, $i = 1, 2$

হবে। কিন্তু $a_{ii} \leq 1$ অর্থ হলো এক একক i তম দ্রব্য উৎপাদন করতে এক এককের অধিক উক্ত দ্রব্যাকে মধ্যবর্তী উৎপাদক হিসাবে সরাসরি ব্যবহার করা যাবে না। আরও একটি অতিরিক্ত শর্ত হলো

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} \geq 0 \qquad ......(7)$$

$xi \geq 0$ হবে যদি এই দুই শর্ত একইসাথে সাধিত হয়।

অর্থাৎ $|I - A| = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix}$ এবং একইসাথে যদি এর সবকটি প্রধান মাইনর অঋণাত্মক হয় তবেই মোট উৎপাদন $x_i \geq 0$ বা অঋণাত্মক হবে।

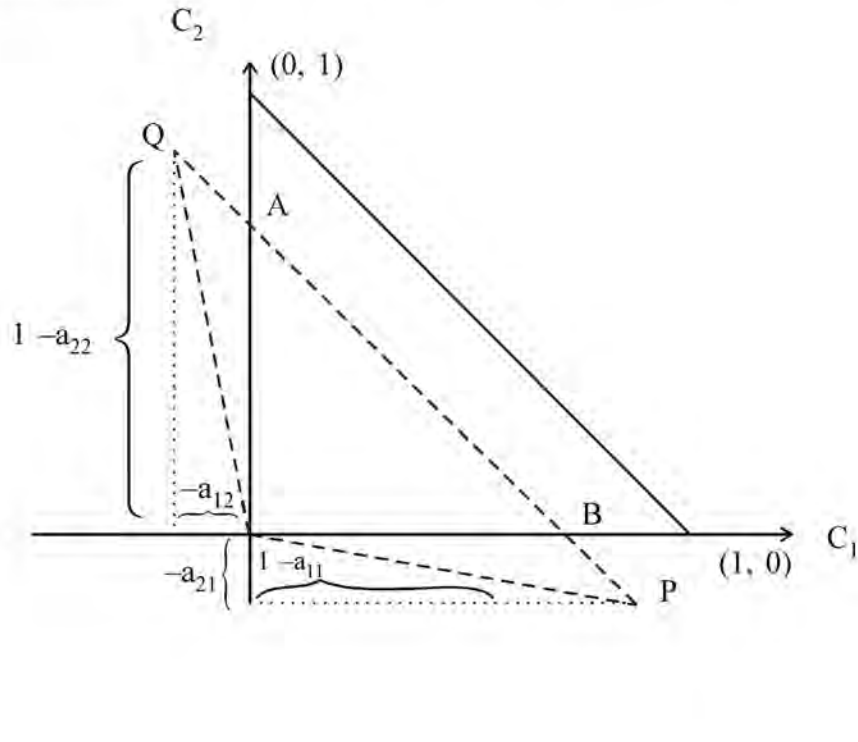
(7) কে আবার নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$\frac{1-a_{11}}{a_{12}} \geq \frac{a_{21}}{1-a_{22}} \qquad ..... (8)$$

(6) কে পুনরায় লেখা যায় $\quad x_2 = \frac{1-a_{11}}{a_{12}} x_1 = \frac{\bar{c}_1}{a_{12}}$

$$x_2 = \frac{a_{21}}{1-a_{22}} x_1 + \frac{\bar{c}_2}{a-a_{12}}$$

তাহলে (8) এর বাঁদিক ও ডান দিকের পদ দুটি হলো (9) নং সমীকরণের রেখাদুটির নতি। এই রেখা দুটি নীচে আঁকা হলো।



(9) নং সমীকরণের মাধ্যমে উল্লেখিত সমীকরণ দুটিকে C_1, C_2 প্লেনে (plane) এ আঁকা হল। যদি এক একক x_1 এবং 0 একক x_2 মোট উৎপাদন হয় তাহলে নীট উৎপাদন হবে x_1 এর ক্ষেত্রে $(1 - a_{11})$ ও x_2 এর ক্ষেত্রে $-a_{21}$; এবং যেখানে x_1 এর a_{11} ও x_2 এর ক্ষেত্রে $-a_{21}$ ইনপুট লাগবে এক একক x_1 প্রস্তুত করতে। একই পদ্ধতিতে x_2 এর এক একক মোট উৎপাদনের জন্য নীট উৎপাদন হবে x_1 এর $-a_{12}$ ও x_2 $(1 - a_{22})$ প্রথমটি থেকে P বিন্দু ও দ্বিতীয়টি থেকে Q বিন্দু পাওয়া যাবে। OP রেখার নতি হবে এবং OQ রেখার নতি হবে ।

যখন মোট উৎপাদন (1, 0) থেকে (0, 1) হবে তখন নীট উৎপাদন PQ রেখা বরাবর P বিন্দু থেকে Q বিন্দুতে যাবে। PQ প্রথম চতুর্থাংশকে (first quadrant), যথাক্রমে B ও A বিন্দুতে ছেদ করে, এবং অ ঋণাত্মক নীট উৎপাদন প্রাপ্ত হয় যখন কেবলমাত্র OQ রেখা, OP রেখার থেকে বেশী খাড়া হয় (OQ is steeper than OP) অর্থাৎ ঃ

$$\left|\frac{1-a_{22}}{a_{22}}\right| \geq \left|\frac{a_{21}}{1-a_{11}}\right| \Rightarrow (1-a_{22})(1-a_{11}) \geq a_{12}a_{21} \text{ হবে।}$$

এই শর্তটিকে বলা হয় হকিন্স-সাইমন্স শর্ত।

এই শর্তটির ব্যাখ্যা হলো কোনো ক্ষেত্রের এক একক উৎপাদন করতে যে পরিমাণ প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষ উৎপাদন লাগে তার সবটা যোগ করলে এক এককের কম হবে।

উদাহরণ (১) নিচের প্রদত্ত সারণী থেকে প্রযুক্তি সহগ (technical coefficient) নির্ণয় করো। তিনটি ক্ষেত্রের মোট উৎপাদন নির্ণয় করো।

ক্ষেত্র	প্রথম ক্ষেত্রের ইনপুট	দ্বিতীয় ক্ষেত্রের ইনপুট	তৃতীয় ক্ষেত্রের ইনপুট	সর্বশেষ চাহিদা	মোট চাহিদা
প্রথম ক্ষেত্র	20	60	10	70	160
দ্বিতীয় ক্ষেত্র	50	10	80	25	165
তৃতীয় ক্ষেত্র	40	30	20	50	140
মূল্য সংযোজন	30	50	20		
মোট উৎপাদন	140	150	130		

সমাধান ঃ $A = \begin{bmatrix} \frac{20}{140} & \frac{60}{150} & \frac{10}{130} \\ \frac{50}{140} & \frac{10}{150} & \frac{80}{130} \\ \frac{40}{140} & \frac{30}{150} & \frac{20}{130} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.143 & 0.4 & 0.077 \\ 0.357 & 0.067 & 0.615 \\ 0.286 & 0.2 & 0.154 \end{bmatrix}$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.857 & -0.4 & -0.077 \\ -0.357 & .933 & -0.615 \\ -0.286 & -0.2 & 0.846 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 70 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$X = [I - A]^{-1} C$$

$$[I-A]^{-1} = \frac{1}{0.354}\begin{bmatrix} 0.666 & 0.354 & 0.318 \\ 0.478 & 0.703 & 0.555 \\ 0.338 & 0.286 & 0.657 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; \underset{\sim}{X} = \frac{1}{0.354}\begin{bmatrix} 0.666 & 0.354 & 0.318 \\ 0.478 & 0.703 & 0.555 \\ 0.338 & 0.286 & 0.657 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 201.61 \\ 222.57 \\ 179.83 \end{bmatrix}$$

প্রথম ক্ষেত্রের মোট উৎপাদন 201.61 একক, দ্বিতীয় ক্ষেত্রের 222.57 একক ও তৃতীয় ক্ষেত্রের 179.83 একক।

উদাহরণ (২) নীচের তালিকা থেকে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্ষেত্রের মোট উৎপাদন নির্ণয় করো, যেখানে প্রদত্ত আছে প্রযুক্তি সহগ এবং সর্বশেষ চাহিদা। যদি প্রথম ক্ষেত্রে সর্বশেষ চাহিদা 30 একক বৃদ্ধি পায় ও দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ক্ষেত্রে যথাক্রমে 15 ও 25 একক হ্রাস পায় তবে তিনটি ক্ষেত্রের মোট উৎপাদন কত হবে?

আউটপুট বিকল্প

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ইনপুট শিল্প}$$

$$C = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix}$$

সমাধান ঃ $X = [I - A]^{-1}$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.3 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad [I - A]^{-1} = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 743.24 \\ 756.76 \\ 789.19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

এখন $\Delta x = (I - A)^{-1} \Delta C$

$$\Delta x = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ -15 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.55 \\ -32.88 \\ -54.05 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x_2 = x_1 + \Delta \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 743.24 \\ 756.76 \\ 789.19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24.55 \\ -32.88 \\ -54.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 767.79 \\ 723.88 \\ 735.14 \end{bmatrix}$$

3.21 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়ে ম্যাট্রিক্স সম্পর্কিত সংজ্ঞা এবং ধারণা প্রদত্ত হলো। একই সঙ্গে বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স নিয়ে আলোচিত হলো। ম্যাট্রিক্সের ক্রিয়া কলাপ অর্থাৎ যোগ, বিয়োগ, গুণণ পদ্ধতি আলোচনা করে দেখানো হয়েছে কিভাবে রৈখিক সমীকরণ সিস্টেমের অজানা চলকের সমাধান ম্যাট্রিক্স গঠন করে তার সমাধান পদ্ধতি অবলম্বনে অজানা চলকগুলির মান নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে ক্রেমার নিয়মটিও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। পরিশেষে লিওনটিয়েফের বদ্ধ ইনপুট-আউটপুট সিস্টেম অবলম্বনে পারস্পরিক নির্ভরযোগ্য শিল্পগুলির ক্ষেত্রের সম্ভবপর (feasible) মোট উৎপাদন কিরূপে সম্ভব তা দর্শিত হয়েছে।

3.22 প্রশ্নবলী

বিভাগ-ক

১। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান ২

(ক) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে তার রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (transpose) কি হবে?

(খ) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হয় তবে উভয় ম্যাট্রিক্সের যোগফল নির্ণয় করো।

(গ) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে দেখাও $A^2 = A$

(ঘ) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে AB এর মান কত হবে?

(ঙ) নীচের সমীকরণ সিস্টেমটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করো ঃ

$3x + y + z = 1$

$2x + 2z = 0$

$5x + y + 2z = 2$

বিভাগ-খ

2Ð š#ôi þ ü² ÌÙÂ !¡ î ü ẕ î ü y€Ð ² Ì!• þ þ² ÌöÙÂ üŸyš ê5

(ক) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে এর A^{-1} নির্ণয় করো।

(খ) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে দেখাও যে $A^2 - 5A + 7I = 0$

(গ) নীচের A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স থেকে পরীক্ষা করো $(AB)' = B'A'$ হবে কিনা?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ঘ) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ কি একটি অর্থোগনাল ম্যাট্রিক্স?

(ঙ) যদি $2A + B \begin{bmatrix} 4 & 7 & 16 \\ 7 & -3 & 12 \\ 13 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $3B - A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 13 \\ 7 & -2 & 8 \\ 11 & 4 & -8 \end{bmatrix}$ তবে A ও B কত হবে?

বিভাগ-গ

š#ÞïÁ ̄ú² ì!• þ þ² ìöÙÅ ûŸyš **10**

3. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে দেখাও $AB = BA = \underset{\sim}{O}$ যেখানে O হলো একটি ক্রম বিশিষ্ট শূন্য ম্যাট্রিক্স।

4. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো যাতে $A^2 + 2A - B = 0$ হয়।

5. দেখাও যে $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ কে একটি প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল হিসাবে দেখানো যায়।

6. যদি $f(x) = x^2 - 5x + 7$ এবং $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হয় তবে f(A) কত?

7. প্রদত্ত প্রযুক্তি সহগর ম্যাট্রিক্স থেকে প্রথম দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্ষেত্রের মোট উৎপাদন নির্ণয় করো।

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

3.23 গ্রন্থপঞ্জি

1. Chang C and Wain Wright K (2005) : Fundamental Methods of Mathematical Economic, Mcgraw Hill.
2. Renshaw G (2010) : Maths for Economists Oxford University Press.
3. Hadley, G : (1961) : Linear Algebra, Addison - Wesley Publishing Company Inc.
4. Dorfman R.P. Paneaulson and solow (1958) : Linear Programming and Economic Analysis, New york, Mcgraw Hill Book Company.

একক 4 ❑ কিছু চলকের অপেক্ষক

গঠন ঃ

4.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠে কিছু বাস্তব চলকের অর্থাৎ দুই বা ততোধিক বাস্তব চলকের অপেক্ষক কিভাবে প্রকাশ করা যায় এবং তার সমাধান ও প্রয়োগ সম্যকভাবে জানা যাবে।

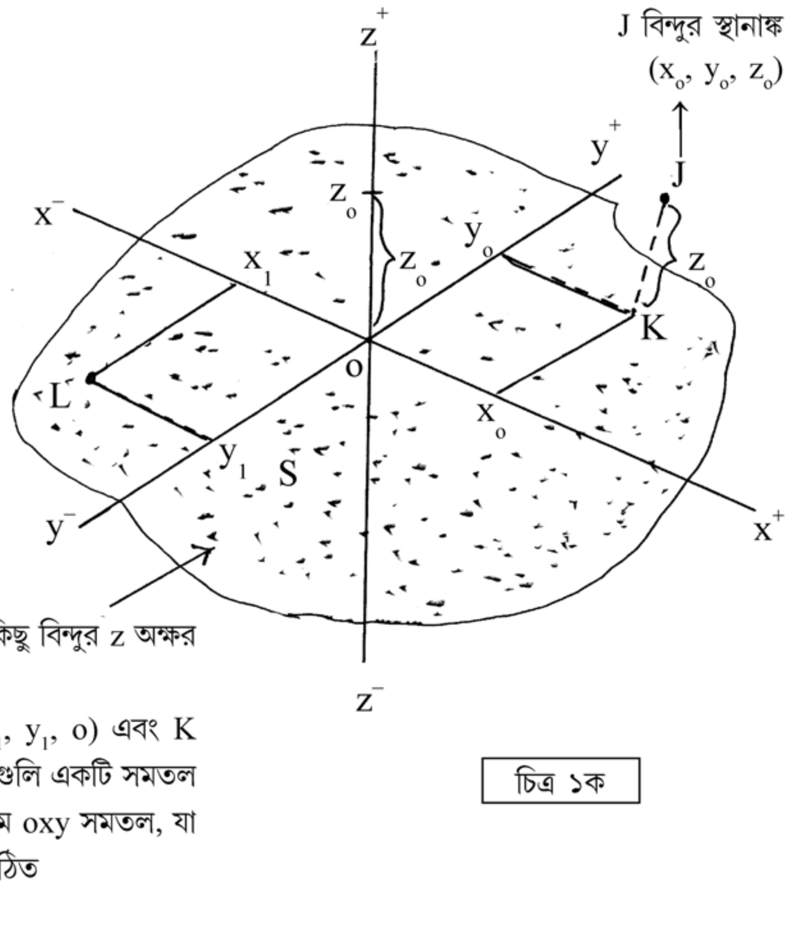
4.2 প্রস্তাবনা

অর্থনৈতিক বিভিন্ন সমস্যার প্রকাশের ক্ষেত্রে বাস্তব বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক পরিলক্ষিত হয়। তার প্রকাশ, এবং প্রসঙ্গত লেভেল রেখা ও দ্বিঘাত রূপের প্রকাশ করার ধারণা সমস্যাগুলির সমাধানের দিক নির্দেশ করে।

4.3 দুই স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষক

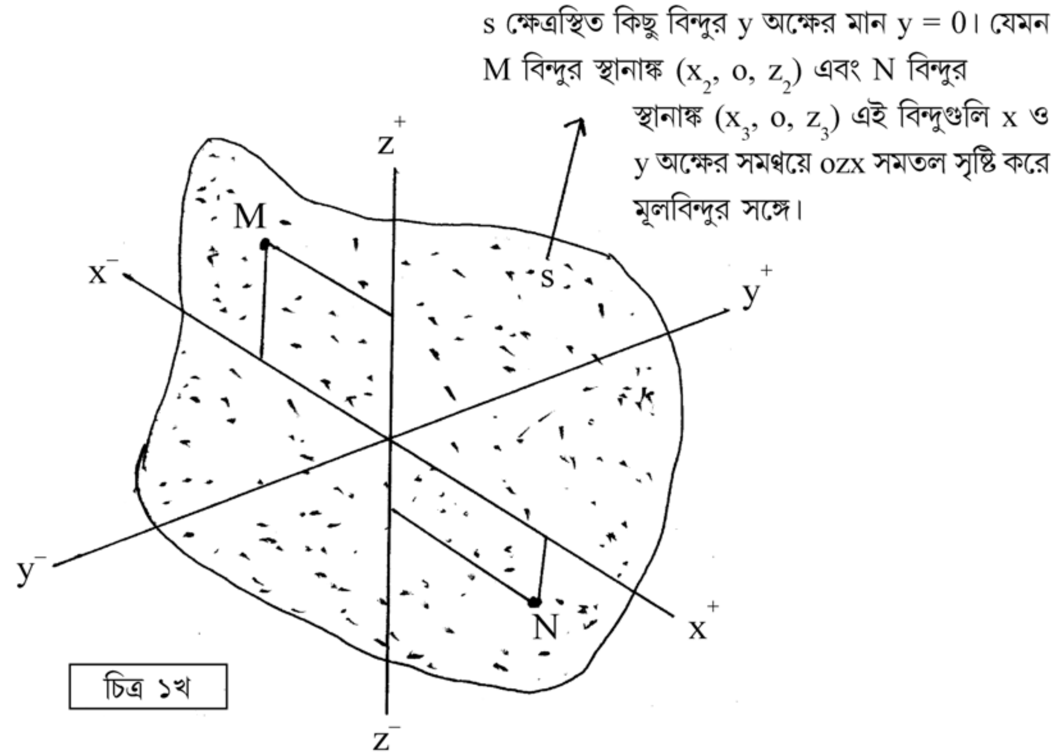
ধরা যাক $Z = f(x, y)$ একটি দ্বিচলক (স্বাধীন) বিশিষ্ট অপেক্ষকের সাধারণ রূপ (general form)। এক্ষেত্রে নির্ভরযোগ্য বা নির্ভরশীল চলরাশি (dependent variables) হলো Z, এবং স্বাধীন চলরাশি হলো x ও y। উদাহরণ হিসাবে বলা যায় $z = 4x^2 - 16y$ বা $Z = e^{3x+2y}$ ইত্যাদি। এই ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র হবে ত্রিমাত্রিক অর্থাৎ তিন অক্ষ বিশিষ্ট (Three dimensional) যেখানে এক একটি অক্ষে এক একটি চলরাশির পরিমাপ হয়।

চিত্র 2 এ এই ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র বোঝানো হয়েছে। সেখানে দেখা যাচ্ছে তিনটি অক্ষই, মূলবিন্দু 0 তে সমকোণে মিলিত হয়েছে। সেখানে দেখা যাচ্ছে তিনটি অক্ষই, মূলবিন্দু 0 তে সমকোণে মিলিত হয়েছে যেখানে x, y ও z এর মান শূন্য। x অক্ষ বরাবর মূলবিন্দু থেকে x* এর দিকে গেলে x ক্রমশঃ ধনাত্মক হবে আবার x- এর দিকে x এর মান ক্রমশঃ ঋণাত্মক হবে, কিন্তু এক্ষেত্রে y ও z এর মান শূন্য থাকবে।

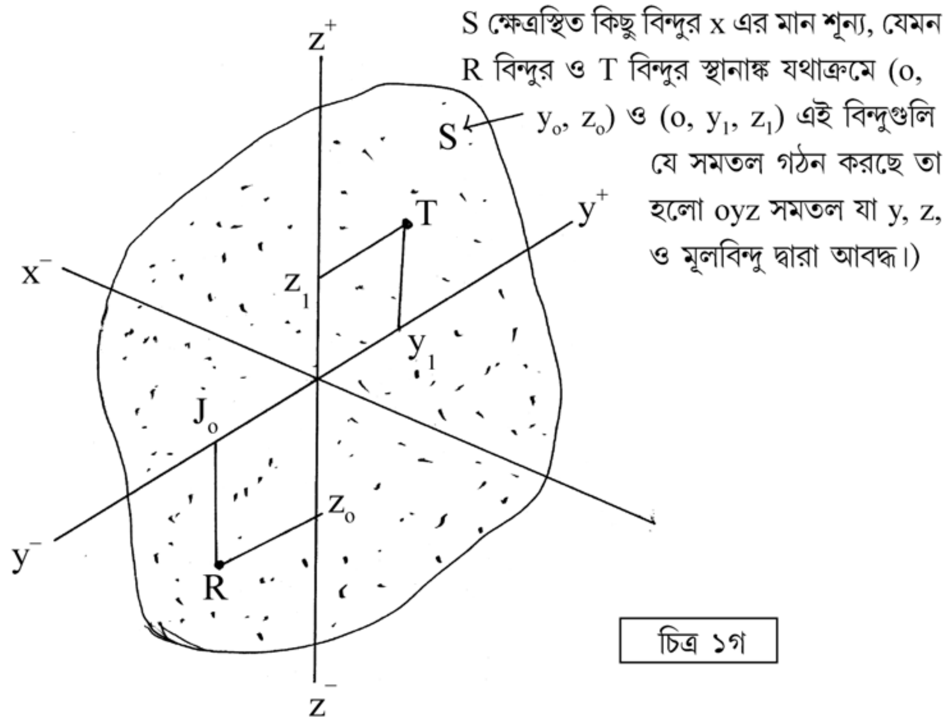


S ক্ষেত্রের বিন্দুগুলি মধ্যে কিছু বিন্দুর z অক্ষর স্থান z = 0।
যেমন L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1, o) এবং K বিন্দুর (x_o, y_o, o) এই বিন্দুগুলি একটি সমতল গঠন করে (plane) যার নাম oxy সমতল, যা x ও y ও মূলবিন্দু নিয়ে গঠিত

চিত্র ১ক


s ক্ষেত্রস্থিত কিছু বিন্দুর y অক্ষের মান y = 0। যেমন M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, o, z_2) এবং N বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_3, o, z_3) এই বিন্দুগুলি x ও y অক্ষের সমণ্বয়ে ozx সমতল সৃষ্টি করে মূলবিন্দুর সঙ্গে।
z^+
M
x^-
s
y^+
y^-
N
x^+
z^-

চিত্র ১খ

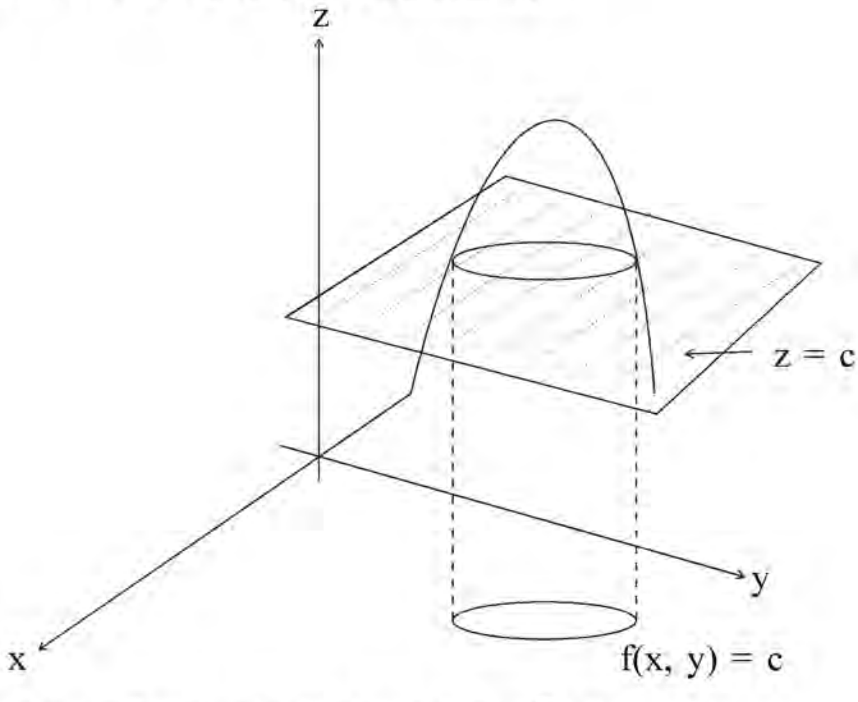

S ক্ষেত্রস্থিত কিছু বিন্দুর x এর মান শূন্য, যেমন R বিন্দুর ও T বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (o, y_o, z_o) ও (o, y_1, z_1) এই বিন্দুগুলি যে সমতল গঠন করছে তা হলো oyz সমতল যা y, z, ও মূলবিন্দু দ্বারা আবদ্ধ।)
z^+
S
T
y^+
x^-
z_1
y_1
J_o
z_o
y^-
R
z^-

চিত্র ১গ

4.4 লেভেল রেখা

$z = f(x, y)$ এর ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে যে লেখচিত্র বোঝানো হলো তাকে xy তলের সমান্তরাল অনুভূমিক তলগুলি (plane) দিয়ে কাটলে সেই অংশগুলিকে xy তলে প্রক্ষেপ করলে, অর্থাৎ লেখচিত্র এবং তলের ছেদাংশ যখন xy তলে প্রক্ষিপ্ত হলে, সেই অংশগুলি লেভেল রেখা তৈরী করে। যদি ছেদক সমতলটি (intersecting plane) $Z = C$ হয়, তাহলে ছেদাংশটি f এর জন্য C উচ্চতায় লেভেল রেখা সৃষ্টি করবে যার রূপ হবে $f(x, y) = C$.

নীচের চিত্রগুলির মাধ্যমে লেভেল রাখা বোঝানো হলো।



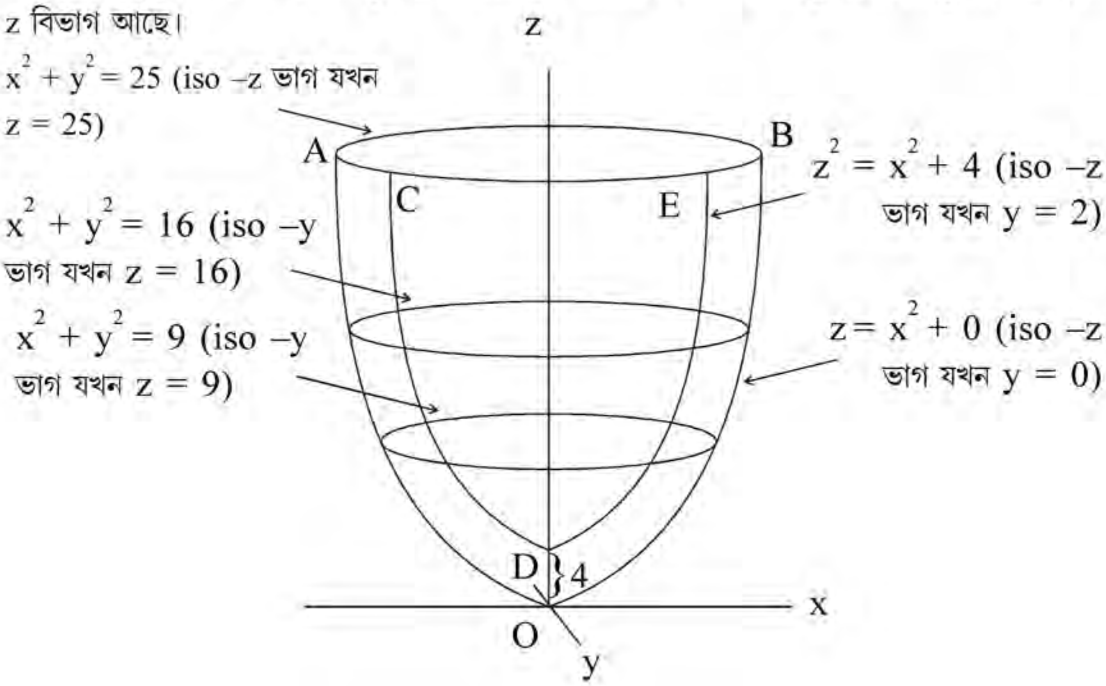
চিত্র ২ ঃ $z = f(x, y)$ এবং তার (x, y) তলে একটি লেভেল রেখা।

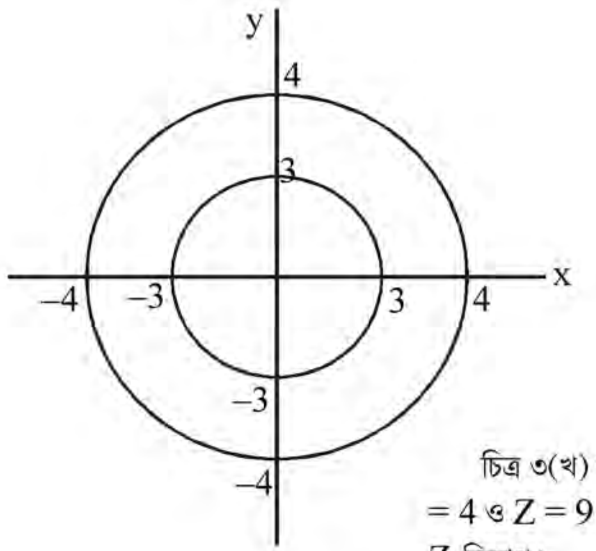
উদাহরণ ১। $z = x^2 + y^2$ এর লেভেল রেখাগুলি অঙ্কন করো Oxy ও Oxy তলে।

সমাধান ঃ নির্ণেয় লেভেল রেখা হলো $x^2 + y^2 = \bar{z}$ সেখানে $\bar{z}$ হলো ধ্রুবক। এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ হবে Oxy তলে যার মূলবিন্দু হবে শূন্য এবং ব্যাসার্ধ হবে $\sqrt{\bar{z}}$ । ধরা যাক $z = x^2 + y^2$ তৈরী হলো নীচ থেকে উপরে একের পর এক বৃত্ত জড়ো করে। তাহলে একটি শঙ্কু (cone) সৃষ্টি হবে যার শীর্ষবিন্দু হবে মূলবিন্দুতে। ইচ্ছেমতো z কে তার বিভিন্ন নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে (এখানে $Z = 0, 9, 16, 25$ নেওয়া হয়েছে যেখানে যথাক্রমে) তল বরাবর বিভক্ত করে যদি oxy তলে প্রক্ষেপ করা হয় তাহলে উপর থেকে দেখলে, শঙ্কুর মধ্যে এই অনুভূমিক বিভাগগুলি একই কেন্দ্রবিন্দু যুক্ত বৃত্তের আকার ধারণ করবে ও নির্দিষ্ট প্রক্ষেপণ গুলি oxy তলে এক একটি বৃত্ত হবে। তেমনি যদি y এর কিছু

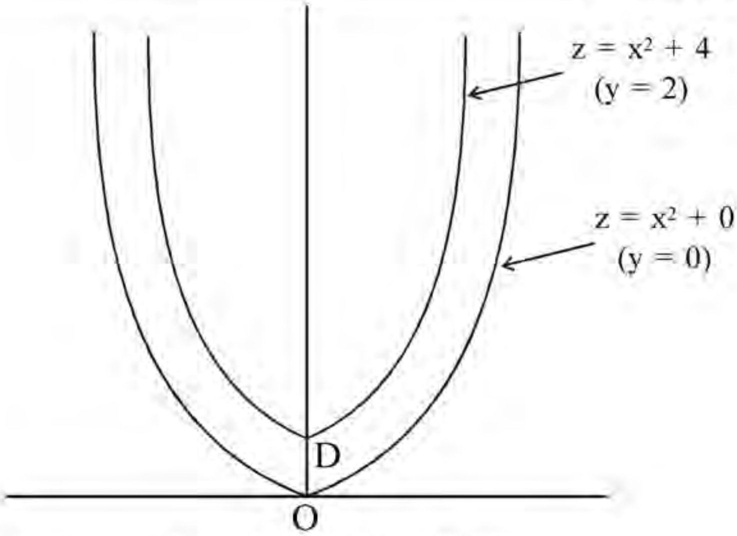
নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে তল বরাবর বিভাগ নিয়ে oxz এ প্রক্ষেপ করা হয় তাহলে চিত্র (৩গ) এর আকার ধারণ করবে। যেমন $y = 0$ হলে AOB বিভাগ হবে যার সমীকরণ $Z = x^2 + o$ এগুলি অধিবৃত্ত হবে।

চিত্র ৩(ক) ঃ $z = x^2 + y^2$-এর ত্রিমাত্রিক প্রকাশ, যেখানে কিছু আইসো y ও আইসো z বিভাগ আছে।





চিত্র ৩(খ) ঃ $z = x^2 + y^2$ এর $Z = 4$ ও $Z = 9$ এর Oxy তলে আইসো Z বিভাগ।



চিত্র ৩(গ) ঃ $z = x^2 + y^2$ এর oxz তলে আইসো y বিভাগ।

উদাহরণ ২। দেখাও যে (x, y) এর সকল বিন্দুগুলি যারা xy = 5 এই শর্তপূরণ করে তারা g(x, y) অপেক্ষকের লেভেল রেখা হবে যেখানে $g(x.y) = \frac{6(xy+1)^2}{x^4y^4-1}$

সমাধান ঃ xy = 5 ; g তে বসালে ঃ

$$g(x.y) = \frac{6(xy+1)^2}{(xy)^4-1} = \frac{6\times 36}{625-1} = \frac{\cancel{216}^{27}}{\cancel{624}_{78}} = \frac{9}{26}$$

অর্থাৎ সকল (x, y) যেখানে xy = 5, g(x, y) এর মান ধ্রুবক বা । সুতরাং (x, y) এর যে কোনো বিন্দু যা xy = 5 এই শর্ত পূরণ করে তারা g এর উচ্চতায় লেভেল কেয়ার উপর অবস্থান করে।

4. আংশিক অবকল ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ ঃ

4. আংশিক অবকলের ধারণা ঃ

যখন y কেবল একটিমাত্র চলরাশি x এর উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ y = f(x) অপেক্ষক হয় যার পরিসর $x \in \mathbb{R}$ হয় তখন y অপেক্ষকের অবকল হলো যে হারে x পরিবর্তনের ফলে y পরিবর্তিত হয় $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, যখন x এর পরিবর্তন খুব স্বল্প হয় অর্থাৎ $\Delta x \quad 0$, যখন $y = f(x_1, x_2)$ হয় তখন x_1 ও x_2 এই দুটি চলরাশি আলাদা ভাবে নিয়ে আবার দেখা যায় y কিভাবে x_1 ও x_2 র প্রত্যেকট্টির পরিবর্তনের ফলে কি হারে পরিবর্তিত হয়। যেমন যখন কে ধ্রুবক রেখে, তা বার করা যায়। প্রাপ্ত ফলাফলকে বলা হয় $y = f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকের x_1 এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল।

অর্থাৎ একে এইভাবে প্রকাশ করা হয় ঃ $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ বা $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ বা $f_1(x_1,x_2)$ কেবলই f_1 যেখানে

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

এইভাবে $y = f(x_1, x_2)$ র, x_2 এর সাপেক্ষে আংশিক অবকলন হবে $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ বা $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ বা $f_2(x_1, x_2)$ বা কেবলই f_2 যেখানে

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = Q \quad = \quad \frac{1}{3}K^{\quad 3} L^{\quad 3} \ ,$$

আংশিক অবকলম বলার কারণ হলো, এক্ষেত্রে কেবল একবারে x_1 বা x_2 এর পরিবর্তনের ফলে y এর পরিবর্তন গণ্য করা হচ্ছে, যদিও y ; x_1 ও x_2 উভয়ের উপরই নির্ভরশীল।

4.5. আংশিক অবকলের নিয়ম

যে কোনো $y = f(x_1, x_2)$, দুই স্বাধীন চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকদের দুটি প্রথম বর্গীয় আংশিক অবকল থাকে।

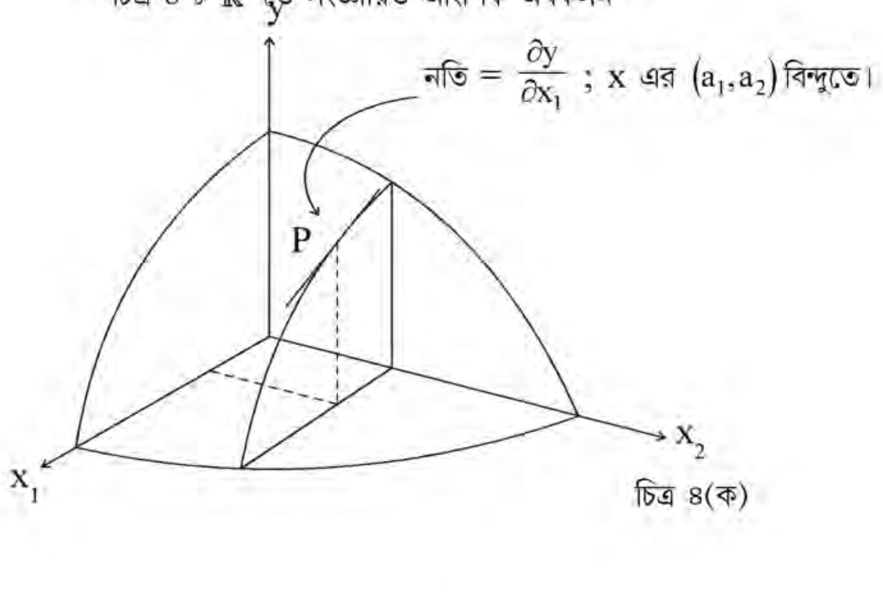
(ক) আংশিক অবকল , যেখানে , x_1 এর দিকের তলের নতি পরিমাপ করে। অবচলনের নিয়মানুসারে এর মান নির্ণয়ের সময়ে x_2 কে স্থির রাখতে হবে।

(খ) আংশিক অবকল যেখানে , x_2 এর দিকের তলের (surface) নতি পরিমাপ করে। অবকলনের নীতি অনুসারে এর মান নির্ণয়ের সময়ে x_1 কে ধ্রুবক বা স্থির রাখতে হবে।

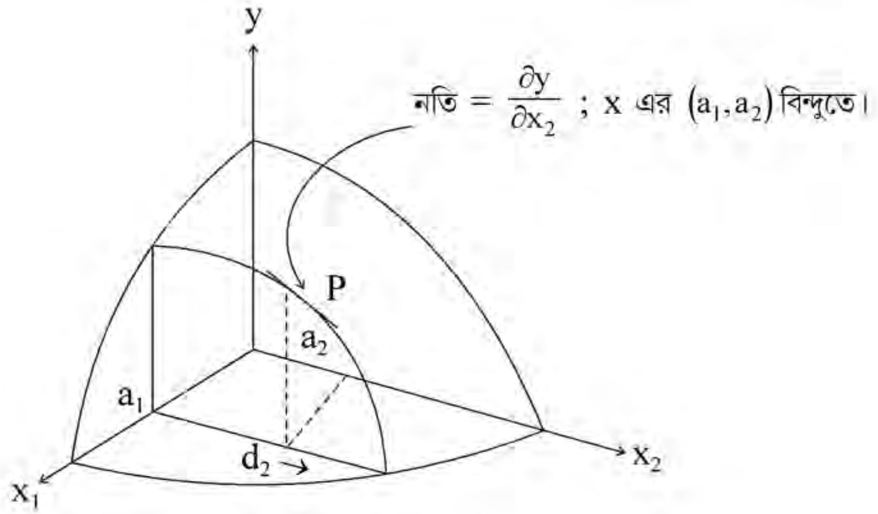
4. চিত্রের মাধ্যমে আংশিক অবকলের ধারণার ব্যাখ্যা ঃ

চিত্র ৪(ক) তে দেখা যাচ্ছে যে x_2 কে স্থির রাখলে মাত্র দুটি দিক থেকে প্রদত্ত বিন্দুর কাছে যাওয়া যাবে।

চিত্র ৪ ঃ $\mathbb{R}^2$ তে সংজ্ঞায়িত আংশিক অবকলন



চিত্র ৪(ক)



এক্ষেত্রে, $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ যেন একটি স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের, সেই চলরাশির পরিবর্তনের ফলের মতো আচরণ করে।

এবার যদি n সংখ্যক চলরাশি গ্রহণ করা হয় অর্থাৎ অপেক্ষক যদি $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ হয়, তাহলে

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n)}{\Delta x_i} \quad \ldots\ldots(1)$$

হবে y এর x_i এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল।

নীচের উদাহরণের মাধ্যমে কিভাবে আংশিক অবকলের মান নির্ণয় করা হয় তা বোঝানো হলো।

উদাহরণ (১) $y = x_1^2 x^2$ এই অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ (1) নম্বর সূত্রানুসারে অর্থাৎ অবকলনের প্রথম নীতি অবলম্বন করলে ঃ

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_2, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x_2)^2 x_2 - x_1, x_2}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left(x_1^2 + 2x_1\Delta x_1 + (\Delta x_1)^2\right)x_2 - x_1^2 x_2}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\left(2x_1\Delta x_1 + (\Delta x_1)^2\right)\cdot x_2}{\Delta x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} (2x_1 + \Delta x_1)x_2 = 2x_1x_2$$

প্রথম নীতি ছাড়া আংশিক অবকলন নীতি অনুসারে ঃ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ নির্ণয় করার ক্ষেত্রে $x_2 = a$ এই ধ্রুবকে স্থির রাখা হলো।

$$\therefore y = cx_1^{\ 2}$$

$$\text{এখন } \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{d(cx_1^{\ 2})}{dx_1} = 2cx_1$$

$$\therefore \frac{\partial f(x_1x_2)}{\partial x_1} = 2x_2x_1$$

4.6 অর্থনৈতিক প্রয়োগ

উদাহরণ ১। নিম্নলিখিত পরিবারভিত্তিক চাহিদা রেখাটি গণ্য করো ঃ

$q^d = q^d(p, y) = 10y^2 + 2y^4p^{-2} - 3p^3$ $(p, y > 0)$

${q^d}_y$, ${q^d}_p$, ${q^d}_{yy}$, ${q^d}_{pp}$, ${q^d}_{py}$ এবং ${q^d}_{yp}$.

$$q_p^{\ d} = \frac{\partial q^d}{\partial p} = -4y^4p^{-3} - 9p^2$$

$$q_y^{\ d} = \frac{\partial q^d}{\partial y} = 20y + 8y^3p - 2$$

$$\frac{\partial^2 q^d}{\partial p^2} = q^d_{pp} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial q^d}{\partial p}\right) = 12y^4p^{-4} - 18p$$

$$\frac{\partial^2 q^d}{\partial y^2} = q^d_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q^d}{\partial y}\right) = 20 + 24y^2p - 2$$

$$\frac{\partial^2 q^d}{\partial p \partial y} = q^d_{py} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial q^d}{\partial y}\right) = -16y^3p^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 q^d}{\partial p \partial y} = q^d_{py} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q^d}{\partial p}\right) = -16y^3p^{-3}$$

(২) কোনো উৎপাদনে অপেক্ষক $Q = \frac{1}{3}K^3L^3$, যেখানে Q হলো উৎপাদনের পরিমাণ এবং K ও L হলো যথাক্রমে মূলধন ও শ্রম। মূলধন ও শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ মূলধনের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার MP_K ও শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা MP_L যথাক্রমে Q কে K ও L এর সাপেক্ষে আংশিক অবচলন করলেই পাওয়া যাবে।

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = K^2L^3 \text{ এবং } MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K^3L^2$$

4.6.1 অনেক চলরাশি ভিত্তিক আংশিক অবকলনের দ্বিতীয় ক্রম (Second order Partial derivatives with more variables)

পূর্বে আলোচিত হয়েছে যে যদি $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ একটি অপেক্ষক হয় তাহলে $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, যেখানে $i = 1, 2, ..., n$ বলতে বোঝায় x_i এর সাপেক্ষে $f(x_1, ..., x_n)$ এর আংশিক অবকলন যেখানে x_i ব্যাতীত বাকী সকল স্বাধীন চলরাশিকে স্থির রাখা হয়।

f এর প্রত্যেক n প্রথম বর্গীয় আংশিক অবকলের সাপেক্ষে n দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকল হলো ঃ

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = y''_{ij}$$

এক্ষেত্রে i ও j উভয়েই 1, 2, ..., n এর মধ্যে যে কোনো মান নিতে পারে বা সর্বমোট n^2 দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকল থাকে।

যদি এই দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকলকে $n \times n$ বর্গাকার বিন্যাসে সজ্জিত করা যায় তবে তা হবেঃ

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & f''_{12}(x) & f''_{1n}(x) \\ f''_{21}(x) & f''_{22}(x) & f''_{2n}(x) \\ f''_{n1}(x) & f''_{n2}(x) & f''_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

এই বিন্যাসকে বলা হয় f-এর হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স যেখানে $f, \underset{\sim}{x} = (x_1, ..., x_n)$ এর উপর নির্ভর করে।

উদাহরণ ১। $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3$ এর হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ নির্ণয় হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স হলো ঃ

$$f''(x) = \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & f''_{12}(x) & f''_{1n}(x) \\ f''_{21}(x) & f''_{22}(x) & f''_{2n}(x) \\ f''_{n1}(x) & f''_{n2}(x) & f''_{nn}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3x_2^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 6x_1x_2 - 2x_3^2 & -4x_2x_3 \\ 0 & -4x_2x_3 & -2x^2 + 6x_3 \end{bmatrix}$$

4.7 Young উপপাদ্য

মনে করা যাক f(x_1, x_2, ..., x_n) এর সকল m তম আংশিক অবকল হলো অবিচ্ছিন্ন। এবার যদি তাদের যে কোনো দুটি এমন হয় যে তাদের প্রত্যেককেই একই সংখ্যক বার, প্রত্যেকের সাপেক্ষে অবকলিত হয় তবে তারা সমান হয়। (suppose that all the with order partial derivatives of the function f(x_1, x_2, ..., x_n) are continuous. If any two of theme involve differentiating w.r.t each of the variables the same number of timex, then they are necessarily equal.

ধরা যাক m = m_1 + m_2 ..... m_n এবং মনে করা যাক f(x_1, x_2, ..., x_n) যথাক্রমে m_1 সংখ্যকবার x_1 m_2 সংখ্যক বার x_2, ..., m_n সংখ্যক বার x_n কে অবচলন করা হলো। এক্ষেত্রে কিছু m_1, ..., m_n শূন্য হতেই পারে। ধরা যাক m তম ক্রমের ক্ষেত্রে (mta order) আংশিক অবকলনের অবিচ্ছিন্নতার শর্তপূরণ হয়েছে। তাহলে m = 2 এর ক্ষেত্রে

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i = 1, 2, ...n, j = 1, 2, ..n)$$

হবে যদি উভয় অবকলই অবিচ্ছিন্ন হয়।

4.8 গ্র্যাডিয়েন্ট এবং হেসিয়ান

কোনো একটি সমতলে গ্র্যাডিয়েন্ট ভেক্টরকে লেখা যায় Df(x_1, x_2) বা $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2 \end{bmatrix}$

যেখানে $f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ ও $f_2(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে ঃ

$$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

বা একে $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ হিসাবেও প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ ১। $f(x, y) = xy^4 + x^3y^2$ এর গ্র্যাডিয়েন্ট ও হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ উক্ত অপেক্ষকের আংশিক অবকলগুলি হলো ঃ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^4 + 3x^2y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy^3 + 2x^3y$$

সুতরাং $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12xy^2 + 2x^3$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y^3 + 6x^2 y$

অতএব গ্র্যাডিয়েন্ট ঃ $Df(x, y)$ বা $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (3x^2 + y^2)y^2 \\ (2x^2 + 4y^2)xy \end{pmatrix}$

এবং হেসিয়ান হলো ঃ $\nabla^2 = \begin{bmatrix} 6xy^2 & 2y(3x^2 + 2y^2) \\ 2y(3x^2 + 2y^2) & 2x(x^2 + 6y^2) \end{bmatrix}$

4.9 দ্বিচলকবিশিষ্ট রাশির দ্বিঘাত রূপ

এই অধ্যায় আলোচনার পূর্বে-অন্তরকলজ সম্পর্কে ধারণা থাকা আবশ্যক। কারণ পূর্বে আমরা দেখেছি $\frac{dy}{dx}$ বলতে সহজ করে বোঝায় যখন Δx, শূন্যের দিকে অগ্রসর হয় তখন $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর সীমা কি হবে সেই মান। এখন দেখবো এই কিভাবে অন্তরকলজ অনুপাত (differential ratio) হিসাবে প্রকাশিত হবে যেখানে dy হবে y এর অন্তরকলজ ও dx হবে x এর অন্তরকলজ।

4.9.1 পূর্ণ ও আংশিক অন্তরকলজ (Total and partial differential)

যদি একক স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষক নেওয়া যায় অর্থাৎ $y = f(x)$, সেক্ষেত্রে y এর অন্তরকলজ অর্থাৎ dy ; x এর স্বল্প পরিবর্তন, dx ; এর জন্য কতটা পরিবর্তিত হবে সেই মানকে নির্দেশ করবে।

যদি স্বাধীন চলরাশি দুই বা তার অধিক হয়, তখন পূর্ণ চলরাশির স্বল্প পরিবর্তন জন্য, নির্ভরশীল চলরাশি কতটা পরিবর্তিত হয়।

অর্থাৎ $Z = f(x, y)$ হলে পূর্ণ অন্তরকলজ

$$dz = \frac{\partial x}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= z_x dx + z_y dy$$

উদাহরণ (১) ধরা যাক $Z = x^6 + 10xy + 5y^4$ তাহলে Z এর পূর্ণ অন্তরকলজ কি হবে?

সমাধান ঃ $Zx = 6x^5 + 10y$ $Zy = 10x + 20y^3$

সুতরাং $dz = (6x^5 + 10y)dx + (10x + 20y^3)dy$.

4.9.2 পূর্ণ অবকল (Total Derivatives)

ধরা যাক $Z = f(x, y)$ এবং $Y = g(x)$ অর্থাৎ y ও x তারা স্বাধীন নয়। x এর পরিবর্তন সরাসরি

যেমন Z কে প্রভাবিত করে, তেমন পরোক্ষভাবে g অপেক্ষকের মাধ্যমেও Z কে প্রভাবিত করে। এক্ষেত্রে পূর্ণ অবকল এই প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষ, দুই প্রভাবই পরিমাপ করে $\frac{\partial z}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$ এর মাধ্যমে।

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \boxed{y} \arrow[r, "f"] & \boxed{z} \end{tikzcd}$$

সুতরাং পূর্ণ অবকল হলো $\frac{dz}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx}$

উদাহরণ (১) $z = f(x, y) = 6x3 + 7y$ এর পূর্ণ অবকল নির্ণয় করো, যেখানে $y = g(x) = 4x^2 + 3x + 8$.

সমাধান ঃ $\frac{dz}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx}$

$z_x = 18x^2,\ z_y = 7,\ \frac{dy}{dx} = 8x + 3$

সুতরাং $\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 7(8x + 3)$

$= 18x^2 + 56x + 21$

4.9.3 দ্বিতীয় ক্রমের পূর্ণ অন্তরকলজ (Second Order total differentials)

আগের অধ্যায়ে বা পাঠে দেখা গেল $Z = f(x, y)$ এর ক্ষেত্রে $dz = Z_x dx + Z_y dy$ যাকে আবার $f_x d_x + f_y d_y$ ভাবেও প্রকাশ করা যায়। এমন dz নির্ভর করে fx ও fy এর উপর, যেখানে fx আর fy উভয়েই x ও y এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ dz, Z এর মতোই x ও y এর উপর নির্ভরশীল।

$$d^2z \equiv d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}^{(dz)} dx + \frac{\partial}{\partial y}^{(dz)} dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(fx^{dx} + fy^{dy}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(fx^{dx} + fy^{dy}\right)dy$$

$$= \left(fxx^{dx} + fxy^{dy}\right)dx + \left(fxy^{dx} + fyy^{dy}\right)dy$$

$$= fxx^{dx^2} + fxy^{dydx} + fyx^{dxdy} + fyy^{dy^2}$$

$$= fxx^{dx^2} + 2fyx^{dxdy} + fyy^{dy^2}\left[fxy = fyx\right]$$

এই d^2z একটি দ্বিঘাত গঠনের প্রকাশ। এর চিহ্ন ধনাত্মক, ঋণাত্মক, কঠোর ধনাত্মক বা কঠোর ঋণাত্মক, হতে পারে dx ও dy এর যে কোনো মানের জন্য (arbetrary), যেখানে উভয়েই শূণ্য নয় একসাথে, কিছু নির্দিষ্ট নিয়মের ভিত্তিতে। ধরা যাক $u = dx$, $v = dy$, $a = f_{xx}$, $b = f_{yy}$, $n = f_{xy}$ $(= f_{yx})$.

সুতরাং $d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$ বা $q = au^2 + 2huv + bv^2$ হলো q এর u এবং v রাশিভিত্তিক দ্বিঘাতরূপ। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে এখানে $dx = u$ এবং $dy = v$, চলরাশি হিসাবে প্রকাশ পায় এবং দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলগুলি স্থির রাশি হচ্ছে।

এবার নিম্নপ্রদত্ত a, b ও h এর উপর বাধা আরোপের ফলে, এবং যেখানে u ও v যে কোনো মান নিতে পারবে, সেই অবস্থায় q এর কি নির্দিষ্ট চিহ্ন হতে পারে তা গণ্য করা যাক। তা বিচার করার জন্য মনে রাখতে হবে ঃ

(ক) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে যদি q অবশ্যই ধনাত্মক বা $q > 0$ হয়।

(খ) q ধনাত্মক আধানির্দিষ্ট হবে যদি $q \geq 0$ হয়।

(গ) q ঋণাত্মক আধানির্দিষ্ট হবে যদি $q \leq 0$ হয়।

(ঘ) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হয় যদি $q < 0$ হয়।

যদি চলরাশিগুলি বিভিন্নরকম মান নেয় তাহলে q অনির্দিষ্ট হবে। (If a changes sign when the variables assurare different valuex, it is said to be indefinite).

এই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক নির্দিষ্টতা, চরম বা অবম মান নির্বাচন সংক্রান্ত দ্বিতীয় বর্গীয় যথেষ্ট শর্তের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। আবার আধানির্দিষ্টতা, দ্বিতীয় বর্গীয় যথেষ্ট শর্তের সঙ্গে সম্পর্কিত। যখন $q = d^2z$ অনির্দিষ্ট হয় তখন স্যাডেল বিন্দু (saddle point) বা জিন বিন্দু দেখা যায়।

4.10চিহ্ন নির্দিষ্টকরণের নির্ণায়ক পরীক্ষা

আমরা দেখেছি যে $q = au^2 + 2huv + bv^2$ এই সমীকরণে ণ্ণযদি ডানদিকে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করা যায় তাহলে হবে

$$q = au^2 + 2huv + \frac{h^2}{a}v^2 + bv^2 - \frac{h^2}{a}v^2$$

$$= a\left[u^2 + \frac{2h}{a}uv + \frac{h^2}{a}v^2\right] + \left[b - \frac{h^2}{a}v^2\right]$$

$$= a\left(u + \frac{h}{a}v\right)^2 + \frac{ab - h^2}{a}\left(v^2\right)$$

অর্থাৎ q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $a > 0$ এবং $ab - h^2 > 0$ হয়। আবার q ঋণাত্মক

নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $a < 0$ এবং $ab - h^2 > 0$ হয়। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই $(ab - h^2)$ কে ধনাত্মক হতেই হবে। সেটা একমাত্র সম্ভব হতেই হবে। সেটা একমাত্র সম্ভব যদি ab ধনাত্মক হয়। আবার a ও b যদি একই চিহ্নযুক্ত হয় তবেই ab ধনাত্মক হবে।

উপরিউক্ত শর্তগুলি নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব।

$q = au^2 + 2huv + bv^2$

$\quad = au^2 + h(av) + h(vu) + bv^2$

এই সমীকরণটি সহগগুলি একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (symmetric matrix) গঠন করে, যার মুখ্য কর্ণে থাকবে a ও b অন্য স্থান্তেন বা off diagonal এ থাকবে h। অর্থাৎ

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a & h \\ n & b \end{vmatrix}$ কে বলা হয় q এর নিরূপক (dis criminant) বা $|D|$। তাহলে পূর্বে বর্ণিত q এর, a, b ও h ভিত্তিক চিহ্নকে এভাবেও বলা যাবে যে ঃ

(ক) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $|a| > 0$ ও $\begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} > 0$ হয়।

(খ) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $|a| < 0$ বা $\begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} > 0$ হয়।

যেখানে $|a|$ হলো প্রথম নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনর (first leading principal minor) এবং $\begin{vmatrix} a & h \\ n & b \end{vmatrix}$ হলো দ্বিতীয় নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনর।

এবার d^2z এ প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায় ঃ

(ক) d^2z হবে ধনাত্মক নির্দিষ্ট যদি $fxx > 0$ ও $\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix} = fxxfyy - f^2xy > 0$

(খ) d^2z হবে ঋণাত্মক নির্দিষ্ট যদি $fxx < 0$ এবং $\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix} = fxxfyy - f^2xy > 0$ হয়।

$fxxfyy - f^2xy > 0$ তখনই সম্ভব যদি fxx ও fxy একই চিহ্নযুক্ত হয়।

এই অধ্যায়ে আলোচিত হেসিয়াল নিরূপকের সংজ্ঞানুসারে $|H| = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix}$ যেখানে fyx = fxy ইয়ং উপপাদ্যর ভিত্তিতে।

উদাহরণ ঃ যদি fxx = – 4, fxy = 3, fyy = – 8, z = f(x, y) এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে হয়, তাহলে d^2z এর, dx ও dy এর যাই মান হোক না কেন কোনো নির্দিষ্ট চিহ্ন (definite sign) থাকতে পারে?

সমাধান ঃ d^2z এর নিরূপক হলো ঃ $\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$

যেখানে নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনররা হলো $-4 < 0$ এবং $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 9 = 23 > 0$

সুতরাং d^2z হলো ঋণাত্মক নির্দিষ্ট।

4.11 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হলো প্রধানতঃ দুই চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে লেখচিত্রটির আকার কিরূপ হয়। একে লেভেল রেখার মাধ্যমে সহজে কিভাবে প্রকাশ করা হয়। পরবর্তী পর্যায়ে দুই স্বাধীন চলরাশিভিত্তিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আংশিক অবকল নির্ণয় করা এবং অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। পরিশেষে পূর্ণ অন্তরকলজর ধারণা দেওয়া হয়েছে ও এই ধরণের অপেক্ষকগুলির দ্বিঘাত প্রকাশ বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

4.12প্রশ্নাবলী

১। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণমান-২

(ক) লেভেল রেখা কাকে বলে?

(খ) যদি f(x, y) = x + 4y হয় তবে f(0, 1) কত হবে?

(গ) আংশিক অবকল কাকে বলে?

(ঘ) পূর্ণ অবকল কাকে বলে?

(ঙ) ইয়ং উপপাদ্য বিবৃত করো।

২। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির মান ৫ নম্বর।

(ক) দেখাও যে $x^2 + y^2 = 6$ হলো $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 + 2$ এর একটি লেভেল রেখা।

(খ) যদি $f(x, y) = x^3e^{y2}$ হয় তাহলে (x, y) = (1, 0) তে প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলগুলি নির্ণয় করো।

(গ) যদি 2 = (x + y)2 হয় তবে ও এর মান কত হবে?

(ঘ) নীচের অপেক্ষকগুলির গ্র্যাডিয়েন্ট ও হেসিয়াম ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো ঃ

(i) $f(x, y) = x^3eny + 6x^2y^2 + e^2xy$

(ii) $f(x, y) = (x + 4y)(e^{-2x} + e^{-30})$

৩। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান ২০ নম্বর ঃ

(ক) একজন একচেটিয়া কারবারী X ও Y দ্রব্যের যথাক্রমে x ও y একক পরিমাণ বিক্রয় করে। X ও Y দ্রব্যের দাম যথাক্রমে Px ও Py যেখানে Px = 25 – 2x + y ও Py = 20 + x – y। কারবারীর মোট আয় ও প্রান্তিক আয় নির্ণয় করো।

(খ) নীচের অপেক্ষকটির গ্র্যাডিয়েন্ট ভেক্টর ও হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো ও (1, –2) বিন্দুতে তার মান নির্ণয় মান করো ঃ

$f(x, y) = 3x^2y^3 + 2x^3y^2$

(গ) নীচের অপেক্ষকগুলির সকল প্রথম ও দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকলগুলি নির্ণয় করো ঃ

(i) $Z = xy^2 - e^{xy}$ (ii) $Z = x^y$

(ঘ) একজন ভোক্তা X দ্রব্যের x একক এবং Y দ্রব্যের y একক ভোগ করে এবং এক্ষেত্রে তার তৃপ্তির অপেক্ষক (x, y) = 2 ln x + 4 ln y ধরা যাক ভোক্তা প্রথম দ্রব্যের 20 একক এবং দ্বিতীয় দ্রব্যের 30 একক ভোগ করে।

(i) প্রথম দ্রব্যের অতিরিক্ত এক একক ভোগের জন্য তার কতোটা তৃপ্তি বৃদ্ধি পাবে?

(ii) দ্বিতীয় দ্রব্যের অতিরিক্ত এক একক ভোগের জন্য তার কতটা তৃপ্তি বৃদ্ধি পাবে?

(ঙ) নীচের দ্বিঘাত রূপগুলি তাদের সহগের প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের গঠনের ভিত্তিতে প্রকাশ করো। (Express each of the following quadratic forms as a matrix product involving a symmetric coefficient matrix.) ওই প্রতিসম সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক ভিত্তিক পরীক্ষার মাধ্যমে সিদ্ধান্ত করো দ্বিঘাত রূপগুলি ধনাত্মক নির্দিষ্ট বা ঋণাত্মক নির্দিষ্ট।

(i) $q = 3u^2 - 4uv + 7v^2$

(ii) $q = 6xy - 5y^2 - 2x^2$

4.13 গ্রন্থপঞ্জী

1. Allen, R.G.D. : (1938) Mathematical Analysis for Economists, Macmillan and Co. Ltd.
2. Hay M ; Lwernous J ; Mckenna C, Rees R. Stengos T : (2001) : Mathematics for Economics, the MIT Press.
3. Courant, R : (1937) Differential and Integral Calculas, Interscience Publishers, Inc.

একক 5 ❑ তুলনামূলক স্থিতিশীলতার পদ্ধতি

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে

(ক) শৃঙ্খল নিয়ম ও তার প্রয়োগ সম্পর্কিত ধারণা

(খ) আংশিক স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞা ও নির্ণয়

(গ) সমজাতীয় অপেক্ষক সম্পর্কে বিস্তারিত ব্যাখ্যা

(ঘ) হোমোথেটিক অপেক্ষকের ধারণা

5.2 প্রস্তাবনা

যে কোনো একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক যদি নেওয়া যায় যেখানে স্বাধীন চলকটি ও আরও একটি চলকের অপেক্ষক সেখানে অপেক্ষকটির ধরণ ও প্রকৃতি চেইন বিধি অনুসারে করা হয়। এর প্রয়োগ অর্থনীতির বিভিন্ন আলোচনায় দেখা যায় যেমন স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয়। আবার উৎপাদন অপেক্ষক সংক্রান্ত বিভিন্ন ক্ষেত্রে সমজাতীয় অপেক্ষকের ভূমিকা আছে। বিভিন্ন সাম্যাবস্থার অবস্থাগুলির যা প্যারামিটারগুলি এবং স্বাধীন চলকের বিভিন্ন মানের জন্য উপনীত হয়, তার তুলনামূলক আলোচনাই হলো তুলনামুলক সাম্যাবস্থার আলোচনা। এই আলোচনাগুলি ক্ষেত্রে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার ক্ষেত্রে পদ্ধতিগত আলোচনা এই অধ্যায়ে আলোচিত বিষয়।

5.3 শৃঙ্খল নিয়ম বা চেইন রুল

ধরা যাক $z = f(x, y)$ এ $x = g(t)$ ও $y = h(t)$। অর্থাৎ x, ও y ; z এর এই স্বাধীন চলরাশিদ্বয় নিজেরা আবার t এর উপর নির্ভর করে। এবং g ও h হলো অবকলযোগ্য অপেক্ষক। সেক্ষেত্রে z কেও t এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ $z = F(t) = f(g(t), h(t))$.

শৃঙ্খল নিয়ম অনুসারে,

$$F'(t) = f_1(g(t), h(t))\ g'(t) + f_2(g(t), h(t))\ h'(t)$$

বা $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

শৃঙ্খল নিয়ম আসলে যুগ্ম অপেক্ষক বা composite function এর অবকলজনিত নিয়ম।

ধরা যাক $z = f(y)$ এবং $y = g(x)$। অর্থাৎ স্বাধীন চলরাশি y আবার x এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং $z = f[g(x)]$ এই অপেক্ষকটি হলো যুগ্ম অপেক্ষক। সুতরাং যুগ্ম অপেক্ষক হলো অপেক্ষকের অপেক্ষক। এই যুগ্ম অপেক্ষকের অবকলন পদ্ধতিকেই চেইন রুল বলা হয়।

একচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সূত্রটি ব্যাখ্যা করা যাক।

গাণিতিক ভাষায় নিয়মটি বলে ঃ যদি $y = f(u)$ যেখানে $u = g(x)$ তাহলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ সেখানে $\frac{dy}{du}$ হলো $y = f(u)$ এর অবকল এবং হলো $u = g(x)$ এর অবকল।

উদাহরণ ঃ (১) $y = (x^2 + 5x)^3$

ধরা যাক $y = u^3$ এই অপেক্ষকের মাধ্যমে $u = x^2 + 5x$ অর্থাৎ y; $y = u^3$এই অপেক্ষকের মাধ্যমে এর উপর নির্ভরশীল যেখানে u আবার $u = x^2 + 5x$ এই অপেক্ষকের মাধ্যমে x এর উপর নির্ভর করে।

সুতরাং y হলো x এর অপেক্ষকের অপেক্ষক। অর্থাৎ x ও y এর মধ্যে u এই চলরাশির মাধ্যমে একটি কার্যকারণ সম্পর্কিত শৃঙ্খল লক্ষ্য করা যাচ্ছে, যা নিম্নের চিত্রের মাধ্যমে প্রদর্শন করা যায় ঃ

$$y = u^3 \qquad\qquad u = x^2 + 5x$$

(ii) u এর পরিবর্তনের ফলে x এর পরিবর্তন

(i) x এর পরিবর্তনের ফলে u এর পরিবর্তন

এখন শৃঙ্খল নিয়মানুসারে ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

প্রদত্ত $y = u^3 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2$

অনুরূপে $u = x^2 + 5x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 5$

প্রতিস্থাপন করে ঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad = 3\left(x^2 + 5x\right)^2 (2x + 5)$

উদাহরণ (২) $y = (x^2 + 1)^5$

ধরা যাক $u = x^2 + 1, \ \therefore \ y = u^5$

$\therefore \frac{dy}{du} f'(x) = 5u^4 \quad \frac{du}{dx} = g'(x) = 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 (2x)$

$= 5\left(x^2 + 1\right)^4 \cdot 2x$

$= 10x\left(x^2 + 1\right)^4$

5.4. দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে শৃঙ্খল নিয়মের প্রয়োগ

বিষয়টি বিশদভাবে বোঝার জন্যে একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া হলো।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক কোনো এক মুনাফা সর্বোচ্চকারী ফার্ম কেবলমাত্র একটি দ্রব্য প্রস্তুত করে একটি উৎপাদকের সাহায্যে। এর ক্ষেত্রে অবকলনযোগ্য উৎপাদন অপেক্ষককে f, উৎপাদকের মূল্যকে p এবং উৎপাদকের মূল্যকে w ও উৎপাদিত দ্রব্যের দামকে p দিয়ে প্রকাশ করা হলো। ধরা যাক তার মুনাফা সর্বোচ্চকারী উৎপাদক হলো z (w, p). যদি p পরিবর্তিত হয় তাহলে মুনাফা কিভাবে পরিবর্তিত হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\pi(w,p) = pf(z(w,p)) - wz(w,p)$

যেখানে π হলো মুনাফা

R = মোট রেভিনিউ = p, f(z(w, p))

C = মোট ব্যয় = w. z (w, p)

শৃঙ্খল নিয়মানুসারে ঃ

$$\pi_p^1(w,p) = f(z(w,p)) + pf'(z(w,p))z_p'(w,p) - wz_p'(w,p)$$

অথবা

$$\pi_p^1(w,p) = f(z(w,p)) + z_p'(w,p)\left[[pf'(z(w,p)) - w\right]$$

কিন্তু যদি $z(w,p) > 0$ তাহলে $pf'(z(w,p)) - w = 0$

যা হলো প্রথম ক্রমের শর্ত, মুনাফা সর্বোচ্চ করণের জন্য।

সুতরাং যদি $z(w, p) > 0$ হয় তাহলে $\pi_p'(w,p) = f(z(w,p))$.

অর্থাৎ যদি উৎপাদিত দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি পায়, তাহলে ফার্মের সর্বোচ্চ মুনাফার বুদ্ধির হার, সর্বোচ্চ পরিমাণ উৎপাদিত দ্রব্যের সমান হয়।

5.5 আংশিক স্থিতিস্থাপকতা

যেহেতু দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আংশিক অবকলন প্রক্রিয়া আলোচনা করা হলো, ফলে এর উপর ভিত্তি করে দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষকের পৃথকভাবে প্রত্যেকটি চলরাশির ক্ষেত্রে আংশিক স্থিতিস্থাপকতাও নির্ণয় করা যায়।

সংজ্ঞা ঃ $z = z(x,y)$ এই অপেক্ষকের, x এর সাপেক্ষ আংশিক স্থিতিস্থাপকতা হলো ঃ

$$\in_x = z_x'(x,y)\cdot\frac{x}{z(x,y)}$$

y চলরাশির ভিত্তিতে $z = z(x, y)$ এর আংশিক স্থিতিস্থাপকতা হলো $\in_y = z_y'(x,y)\cdot\frac{y}{z(x,y)}$ অর্থাৎ

$z = z(x, y)$ বা $z = f(x, y)$ এর আংশিক স্থিতিস্থাপকতা হলো $\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$ এবং $\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

5.5.1 চাহিদার আংশিক স্থিতিস্থাপকতা (Partial Elasticities of demand)

ধরা যাক a ও b দুটি দ্রব্য ও ভোক্তার আয় হলো Y। ধরা যাক q_a হলো a দ্রব্যের মোট পরিমাণ যা সকল ভোক্তা চাইছে এবং p_a ও p_b হলো a ও b দ্রব্যের মূল্য। সুতরাং সমস্ত ভোক্তাকে একত্রিকরণ করে সমগ্র চাহিদা বা বাজারের চাহিদা অপেক্ষক হলো a দ্রব্যের ক্ষেত্রে $q_a = f(p_a, p_b, Y)$ এক্ষেত্রে আংশিক স্থিতিস্থাপকতাগুলি যথাক্রমে হবে ঃ

(1) $\frac{p_a}{q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial p_a}$ = q_a এর আংশিক স্থিতিস্থাপকতা p_a এর সাপেক্ষে। একে বলা হয় চাহিদার নিজস্ব দামগত স্থিতিস্থাপকতা (Own price elasticity of demand)। এটা পরিমাপ করে a দ্রব্যের দাম পরিবর্তনের ফলে উক্ত দ্রব্যের চাহিদার পরিবর্তনের হার।

(2) $\frac{p_b}{q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial p_b}$ = p_b এর সাপেক্ষে q_a এর আংশিক স্থিতিস্থাপকতা। একে বলা হয় পারস্পরিক আংশিক স্থিতিস্থাপকতা (cross price elasticity of demand)। এটা পরিমাপ করে কি হারে a দ্রব্যের চাহিদার পরিবর্তন ঘটে b দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তন করার ফলে।

(3) $\frac{y}{q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial y}$ = আয়ের সাপেক্ষে q_a র আংশিক স্থিতিস্থাপকতা। এটা পরিমাপ করে আয়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে a দ্রব্যের পরিমাণের পরিবর্তনের হার।

উদাহরণ (১) নিম্নলিখিত চাহিদা অপেক্ষকটির বিবেচনা কর ঃ

$$q_a = 10Y - 0.05Yp_a + 0.02Yp_b$$

যেখানে q_a হলো a দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ, p_a হলো a দ্রব্যের মূল্য, p_b হলো b দ্রব্যের মূল্য এবং Y হলো ব্যক্তির আয়। ব্যক্তির নিজস্ব দাম স্থিতিস্থাপকতা, পারস্পরিক দাম স্থিতিস্থাপকতা ও আয় স্থিতিস্থাপকতার মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\frac{\partial q_a}{\partial p_a} = -0.05y, \frac{\partial q_a}{\partial p_b} = 0.02y$

$$\frac{\partial q_a}{\partial y} = 10 - 0.05p_a + 0.02p_b$$

ব্যক্তির নিজস্ব দাম স্থিতিস্থাপকতা ঃ $\frac{p}{q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial p_a}$

$$= \frac{-0.05p_a}{10 - 0.05p_a + 0.02p_b}$$

যেহেতু লব হলো ঋণাত্মক সুতরাং যতক্ষণ পর্যন্ত হর ঋণাত্মক না হয়, এই স্থিতিস্থাপকতার মান ঋণাত্মক হবে।

পারস্পরিক দামগত স্থিতিস্থাপকতা ঃ $\frac{p_b}{q_a}\cdot\frac{\partial q_a}{\partial p_b}$

$$=\frac{0.02p_b}{10-0.05p_a+0.02p_b}$$

যেহেতু লব ধনাত্মক, সুতরাং এই স্থিতিস্থাপকতা ধনাত্মক হবে যতক্ষণ পর্যন্ত হর ঋণাত্মক না হয়।

আয়গত স্থিতিস্থাপকতা ঃ $\frac{y}{q_a}\frac{\partial q_a}{\partial y}=\frac{y(10-0.05p_a+0.02p_b)}{10y-0.05y_a+0.0yp_b}=1.$

উদাহরণ ঃ যদি কোনো দ্রব্যের চাহিদা রেখার অপেক্ষক হয় $D_1 = Ap^{-0.28}m^{0.34}$ যেখানে p হলো দ্রব্যটির মূল্য ও m হলো গড় আয়। অপর একটি দ্রব্যের মূল্য হলো $D_2 = Bq^{-1.27}m^{1.32}$ যেখানে q হলো সেই দ্রব্যের মূল্য। ওই দুই দ্রব্যের দামগত ও আয়গত স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করো এবং তাদের চিহ্ন সম্পর্কে মন্তব্য করো।

সমাধান ঃ $e_d^1 = -0.28$ অর্থাৎ যদি প্রথম দ্রব্যের মূল্য 1% বৃদ্ধি পায় তাহলে তার চাহিদা প্রায় 28% কমে। আবার $e_q^2 = -1.27$, $e^1_m = 0.34$ এভাবে $e^2_m = 1.32$ যেখানে e^1_m ও e^2_m হলো যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় দ্রব্যের সাপেক্ষে আয়গত স্থিতিস্থাপকতা।

উভয় দ্রব্যের দামগত স্থিতিস্থাপকতাই ঋণাত্মক এবং উভয় দ্রব্যের আয়গত স্থিতিস্থাপকতা হলো ধনাত্মক। কিন্তু লক্ষণীয় এই যে দ্বিতীয় দ্রব্যটি দামগত ও আয়গত স্থিতিস্থাপকতার সাপেক্ষে অনেক বেশী সংবেদনশীল। অর্থাৎ প্রথম দ্রব্যটি তুলনামূলকভাবে নিত্য প্রয়োজনীয় দ্রব্য (essential good)।

5.5.2 n সংখ্যক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আংশিক স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞা

যদি $z = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x)$ হয় তাহলে z বা f এর আংশিক স্থিতিস্থাপকতা হলো x_i এর সাপেক্ষে z এর স্থিতিস্থাপকতা যেখানে অন্য সকল চলরাশির মান ধ্রুবক বা স্থিতিশীল থাকে। সুতরাং ঃ

$$y_z^i=\frac{x_i}{f(x)}\cdot\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\frac{x_i}{z}\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x_i}$$

অর্থাৎ e^i_z পরিমাপ করছে 1%। xi এর পরিবর্তনের ফলে, যেখানে বাকী সকল x_j ধ্রুবক আছে (j = i), z এর শতকরা কত ভাগ পরিবর্তন হয় সেই হার।

5.6 দ্বিচলক বিশিষ্ট চলরাশির ক্ষেত্রে সমজাতীয় অপেক্ষক

x ও y এই চলরাশির উপর ভিত্তি করে D পরিসরে সংজ্ঞায়িত f অপেক্ষক K মাত্রার সমজাতীয় অপেক্ষক হবে যদি সমস্ত $(x, y).\in D$ এর জন্য হয়।

অর্থাৎ x ও y দুই চলরাশিকে কোনো একটি ধনাত্মক উৎপাদক (factor) দিয়ে গুণ করলে, অপেক্ষকের মান t^k উৎপাদকে বৃদ্ধি পায়। এই অপেক্ষকের সমজাতীয়তার মাত্রা K, ধনাত্মক, শূন্য বা ঋণাত্মক যে কোনো সংখ্যা হতে পারে।

উদাহরণ (১) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ এর প্রয়োজনীয়তার মাত্রা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ f(x, y) অপেক্ষকটি x, y এই দুই চলরাশিদ্বয়কে t দিয়ে যদি গুণ করা যায় অর্থাৎ তাদের মান যদি t গুণ পরিবর্তিত হয় তাহলে $f(tx, ty) = 3(tx)^2(ty) - (ty)^3$

$$= t^3(3x^2y - y^3) = t^3f(x, y)$$

সুতরাং f অপেক্ষকটির সমজাতীয়তার মাত্রা ও অর্থাৎ যদি $t = 2$ হয় তবে

$$f(2x, 2y) = 2^3 f(x, y) = 8f(x, y)$$

এটা বোঝাচ্ছে যে x, y এর মান দ্বিগুণ বৃদ্ধি হলে অপেক্ষকের মান 8 গুণ বৃদ্ধি পায়।

উদহরণ (২) ধরা যাক $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ যেখানে পরিসর (domain) হলো $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0 \text{ and } x_2 \geq 0\}$ অপেক্ষকটি সমজাতীয় কিনা বিচার করো।

সমাধান ঃ $f(tx_1, tx_2) = tx_1 + t^2x_2^2$

অপেক্ষকটি $t^K(x_1 + x_2^2)t^K f(x_1, x_2)$ ভাবে K এর কোনো মানের জন্যই লেখা সম্ভব হবে না। ধরা যাক কিছু K এর জন্য আমরা পাই ঃ

$$tx_1 + t^2x^2 = t^K(x_1 + x^2)\forall(x_1, x_2) \geq (0,0)$$

এবং সেখানে সকল $t > 0$.

যদি $t = 2$ ধরা যায় ঃ $2x_1 + 4x_2 = 2^K(x_1 + x_2)\forall(x_1, x_2)$

যদি $(x_1, x_2) = (1, 0)$ এবং $(x_1, x_2) = (0, 1)$ নেওয়া হয় তাহলে $2 = 2^K$ এবং $4 = 2^K$ হবে যা অসম্ভব। সুতরাং f কোনো মাত্রাতেই সমজাতীয় নয়।

n সংখ্যক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সমজাতীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞা ঃ

ধরা যাক f হলো S সেটের সংজ্ঞায়িত n সংখ্যক চলরাশি বিশিষ্ট একটি অপেক্ষক যেখানে (tx_1, tx_2, ..., tx_n) $\in$ S যখনই $t > 0$ এবং (x_1, ..., x_n) $\in$ s, এবং k হলো একটি সংখ্যা। তাহলে f ; k মাত্রার সমজাতীয় অপেক্ষক হবে যদি

$$f(tx_1,...,tx_n) = t^K f(x_1,...,x_n) \forall (x_1,...,x_n) \in S \text{ এবং সকল } t > 0 \text{।}$$

5.7 সরলরৈখিক সমজাতীয়তা

যখন কোনো অপেক্ষকের সমজাতীয়তার মাত্রা এক হয় তখন তাকে সরলরৈখিক সমজাতীয়তা বলা হয়। এই ধরনের অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রয়োগ অর্থনীতির ক্ষেত্রে উৎপাদন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে লক্ষ্য করা যায়।

5.7.1 সরলরৈখিক সমজাতীয় উৎপাদন অপেক্ষকের ধর্ম (Properties of linearly homogeneous production function)

প্রথম ধর্ম ঃ যদি প্রদত্ত উৎপাদন অপেক্ষক Q = f(K, L) হয়, তাহলে শ্রমের গড় উৎপাদনশীলতা (APP_L) ও মূলধনের গড় উৎপাদনশীলতা (APP_K); শ্রম-মূলধন অনুপাতের অপেক্ষক (Capital-labour ratio) $R \equiv \frac{K}{L}$ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

Q = f(K, L) এর K, এবং L এই স্বাধীন চলরাশিকে j = 1/L দিয়ে গুণ করা হলো। সুতরাং $jQ = \frac{Q}{L}$ কারণ সরলরৈখিক সমজাতীয়তা মেনে উৎপাদন JQ পরিমাণ পরিবর্তিত হলো।

$$\therefore f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(R, 1)$$

সুতরাং $APP_L \equiv \frac{Q}{L} = \varnothing(R)$

এবং $APP_K \equiv \frac{Q}{K} = \frac{Q}{L} \cdot \frac{L}{K} = \frac{\varnothing(R)}{R}$

যেহেতু গড় উৎপাদন শুধুমাত্র k এর উপরই নির্ভরশীল সুতরাং রৈখিক সমজাতীয়তা বলতে বোঝায় যতক্ষণ পর্যন্ত $\frac{K}{L}$ অনুপাত ধ্রুবক থাকবে, গড় উৎপাদনও ধ্রুবক থাকবে। অতএব, এক্ষেত্রে, APP_L ও APP_K, K এবং L এর শূন্য মাত্রার সমজাতীয় অপেক্ষক হবে (homogeneous of degree zero in K and L) বা যদি K ও L কে একই মাত্রায় পরিবর্তন করা যায়, গড় উৎপাদনের মান অপরিবর্তিত থাকে।

দ্বিতীয় ধর্ম ঃ প্রদত্ত রৈখিক সমজাতীয় অপেক্ষক $Q = f(K, L)$ এর শ্রম ও মূলধনের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা MPP_L ও MPP_K কে K এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব।

$Q = f(K, L)$ অর্থাৎ $Q = L\varnothing(k)$ যেখানে $R = \dfrac{K}{L}$

এখন Q কে K ও L র সাপেক্ষে অবকল করে পাই ঃ $\dfrac{\partial K}{\partial K} = \dfrac{\partial}{\partial K}\left(\dfrac{K}{L}\right) = \dfrac{1}{L}$

$$\frac{\partial k}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{-K}{L^2}$$

সুতরাং $MPP_K = \dfrac{\partial Q}{\partial K} = \dfrac{\partial}{\partial K}\left[L\varnothing(R)\right]$

$$= L\frac{\partial\varnothing(R)}{\partial K} \quad = L\cdot\frac{\partial\varnothing(R)}{\partial K}\cdot\frac{\partial k}{\partial K} \text{ (শৃঙ্খল নিয়ম)}$$

$$= L\varnothing'(k)\left(\frac{1}{L}\right) \quad = \varnothing'(k)$$

$$MPP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left[L\varnothing(k)\right]$$

$$= \varnothing(k) + L\frac{\partial\varnothing(k)}{\partial L}$$

$$= \varnothing(k) + L\varnothing'(k).\frac{\partial k}{\partial L} \text{ (শৃঙ্খল নিয়ম)}$$

$$= \varnothing(k) + L\varnothing'(k) \times -\frac{K}{L}$$

$$= \varnothing(k) - k\varnothing'(k)$$

অতএব MPP_L ও MPP_K কে কেবলমাত্র k এর অপেক্ষক হিসাবেই প্রকাশ করা গেল। যতক্ষণ পর্যন্ত এই K ও L এর অনুপাত একই থাকবে, K বা L এর মান যাই হোক না কেন, ততক্ষণ পর্যন্ত প্রান্তিক উৎপাদন অপরিবর্তিত থাকবে। এটাই প্রমাণ করে যে, MPP_L ও MPP_K ও K ও L এর শূন্য সমজাতীয় মাত্রা ভিত্তিক অপেক্ষক।

তৃতীয় ধর্ম ঃ অয়লার উপপাদ্য (Euler's Theorem)

যদি f(x, y) অপেক্ষকটি K মাত্রার সমজাতীয় অপেক্ষক হয় তবে $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)$ $=Kf(x,y)$

প্রমাণ ঃ সমজাতীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞার ভিত্তিতে ঃ

$f(tx,ty)=t^K f(x,y)\ \forall\ t>0$

এখন t এর ভিত্তিতে উভয়পক্ষকে অবচলন করে পাই ঃ

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=Kt^{K-1}f(x,y)$$

যদি t = 1 বসানো হয় তাহলে

$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=Kf(x,y)$$

যদি Q = f(K, L) সরলরৈখিক সমজাতীয় অপেক্ষক হয়, তাহলে ঃ $K\frac{\partial\theta}{\partial K}+L\frac{\partial\theta}{\partial L}\equiv\theta$ হবে।

প্রমাণ ঃ $K\frac{\partial\theta}{\partial K}+L\frac{\partial\theta}{\partial L}=K\varnothing'(k)+L\left[\varnothing(k)-k\varnothing(k)\right]$

$=K\varnothing'(k)+L\varnothing(k)-K\varnothing'(k)\left[k={K}/{L}\right]$

$=L\varnothing(k)\ =\theta$

যেহেতু এই ফলাফল K এবং L এর যে কোনো মানের জন্যই সত্যি তাই একে অভেদ সমতা (identical equality) হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ যদি f(x, y) = $3x^2y - y^3$ হয় তাহলে এই ক্ষেত্রে অয়লার উপপাদ্য কি প্রযুক্ত হবে?

সমাধান ঃ $f(\lambda x,\lambda y)=3(\lambda x)^2(\lambda y)-(\lambda y)^3$

$=3\lambda^3x^2y-\lambda^3y^3$

$=\lambda^3\left[3x^2y-y3\right]$

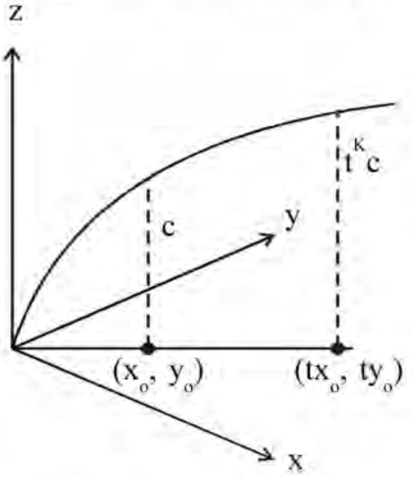
সুতরাং প্রদত্ত সমজাতীয় অপেক্ষকটির সমজাতীয়তার মাত্রা 3.

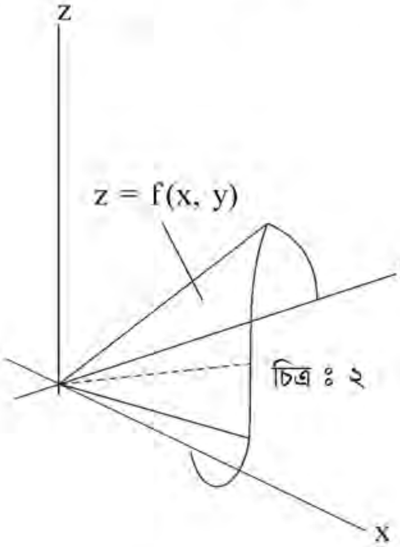
এবং $f_1'(x,y)=6xy$ সুতরাং $f_2'(x,y)=3x^2-3y^2\ =xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)$

$=6x^2y+3x^2y-3y^3\ =3\left(3x^2y-y^3\right)\ 3f(x,y)$

সমজাতীয় অপেক্ষকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ

নীচের ছবি দুটির মাধ্যমে সমজাতীয় অপেক্ষকটি জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসারে ব্যাখ্যা করা হলো ঃ





চিত্র ঃ ২

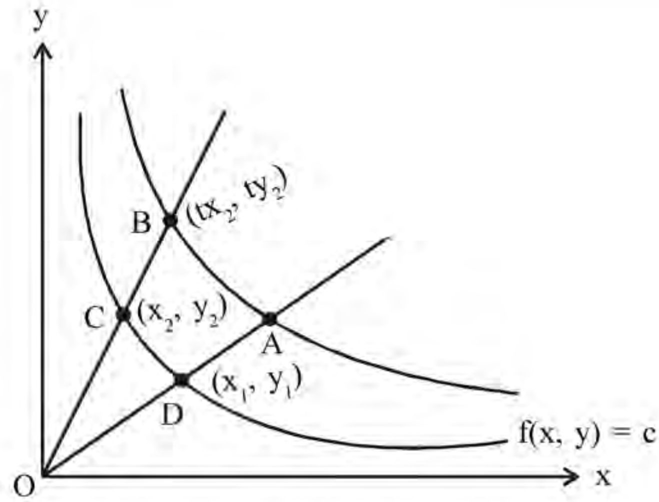
চিত্র ঃ ১। f হলো একমাত্রিক সমজাতীয় অপেক্ষক

ধরা যাক $f(x, y)$, K-মাত্রিক সমজাতীয় অপেক্ষক। এবার xy তলে, মূলবিন্দু (0, 0) থেকে একটি রেখা (ray), $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ র মধ্যে দিয়ে বিবেচনা করা হলো। এই রেখার (ray) উপর (tx_0, ty_0) যেখানে $t > 0$ একটি যে কোনো বিন্দু নেওয়া হলো। যদি $f(x_0, y_0) = c$ হয় তাহলে $f(tx_0, ty_0) = tkf(x_0, y_0)$ বিন্দুর মধ্যে দিয়ে xy তলের উপরিস্থলে f এর যে লেখচিত্র তা হলো $Z = t^k c$, যেখানে t পরিমাপ করে মূল বিন্দু থেকে রশ্মির দূরত্ব (distance along the ray through the θ rigin) এবং $c = f(x_0, y_0)$. মাত্রিক সমজাতীয় অপেক্ষকটি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা সম্ভব, যখন মূলবিন্দু থেকে উৎসারিত যে কোনো রশ্মির উপর এর মান জানা সম্ভব হবে। (A function that is homogeneous of degree K is therefore, completely determined if its value is known at one point on each ray through the origin) (চিত্র 1)

যদি K = 1 হয় অর্থাৎ একমাত্রিক সমজাতীয় অপেক্ষক হয়, তখন $Z = t^k c$ এই রেখা মূলবিন্দু থেকে উদ্ভূত প্রত্যেক প্রযোজ্য রশ্মির উপর উল্লম্বভাবে $Z = tc$ এই সরলরেখার মাধ্যমে দৃশ্য হবে। এই জন্য বলা হয় একমাত্রীয় সমজাতীয় অপেক্ষক মূলবিন্দু থেকে উৎসারিত সরলরেখা হবে। (চিত্র 2)

5.7.2 সমজাতীয় অপেক্ষকের লেভেল রেখা ঃ

এবার আলোচনা করা যাক কিভাবে কোনো বিন্দু A, যা $f(x, y) = C$ এর উপর অবস্থিত নয়, তার মধ্যে দিয়ে লেভেল রেখা অঙ্কন করা যায়।



চিত্র **3.** সমজাতীয় অপেক্ষকের লেভেল চিত্র

মুলবিন্দু ও A বিন্দুর মধ্যে দিয়েএকটি রশ্মি (ray) অঙ্কন করা হলো। এই রশ্মিটি $f(x, y) = C$ এই লেভেল রেখাটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে যার স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)। A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (tx_1, ty_1) যেখানে t এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে। এখন এই A বিন্দুর মতো আর একটি নতুন বিন্দু একই লেভেল রেখার উপর অঙ্কন করা হয় তাহলে আবার মূলবিন্দু থেকে অপর একটি রশ্মি একই লেভেল রেখার উপর অঙ্কনা করা হলো যা $f(x, y) = C$ কে C বিন্দুতে ছেদ করে যেখানে C এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2)। এবার t এর পূর্বের নির্দিষ্ট মান অনুসারে B বিন্দু পাওয়া গেল যার স্থানাঙ্ক (tx_2, ty_2)। এই স্থানাঙ্ক বা B বিন্দু; যে লেভেল রেখায় A বিন্দু অবস্থান করে সেই লেভেল রেখার উপরই অবস্থিত। তার কারণ $f(tx_2, ty_2) = t^k(x_2, y_2) = t^k c = t^k(x_1, y_1) = f(tx_1, ty_1)$ এই পদ্ধতি যদি বিভিন্ন রশ্মি, যা মূলবিন্দু থেকে নির্গত হচ্ছে, তাদের ক্ষেত্রে অবলম্বন করা যায়, এবং মূল লেভেল রেখা $f(x, y) = C$ কে ছেদ করবে, তাহলে নতুন যে লেভেল রেখা $f(x, y) = f(tx_1, ty_1)$ এর উপর অন্যান্য বিন্দুগুলোও পাওয়া যাবে। অর্থাৎ সমজাতীয় অপেক্ষককে তার লেভেল রেখা এবং সমজাতীয়তার মাত্রার মাধ্যমে প্রকাশ করা যাবে।

লেভেল রেখার উপর অবস্থিত প্রতিটি রশ্মির স্পর্শকগুলি (The tangents to the level curvex along each day) পরস্পরের সমান্তরাল। $f(x, y) = c$ এর নতি হলো ঃ $-f_1'(x,y)/f_2'(x,y)$. A

বিন্দুতে নতি ঃ $$\frac{-f_1'(tx_1,ty_1)}{f_2'(tx_1,ty_1)} = -\frac{t^{K-1}f_1'(x_1,y_1)}{t^{K-1}f_2'(x_1,y_1)}$$

$$= -\frac{f_1'(x_1,y_1)}{f_2'(x_1,y_1)}$$

f এর আংশিক অবকলগুলির সমজাতীয়তার মাত্রা K–1। উপরিউক্ত সমীকরণের মাধ্যমে বোঝা গেল যে A ও D বিন্দুগামী দুটি লেভেল রেখার ওই দুই বিন্দুতে একই নতি হয়। সমীকরণটির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা অনুসারে x এর জন্য y এর প্রান্তিক পরিবর্ততার হার (MRs of y for x) হলো শূন্য মাত্রাযুক্ত সমজাতীয় অপেক্ষক।

5.8 হোমোথেটিক অপেক্ষক

সমজাতীয়তা (homogeneity) হলো একটি সংখ্যাভিত্তিক ধর্ম। ধরা যাক দুটি অপেক্ষক $g_1(Z) = Z^3 + Z$ এবং $g_2(Z) = Z+1$। এই দুটি অপেক্ষকই একঘেয়ে রূপান্তর (monotonic transformation) কিন্তু এই রূপান্তর যদি u = xy, এই সমজাতীয় অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়, তাহলে $v(x, y) = x^3y^3 + xy$ এবং $w(x, y) = xy + 1$ এই দুই অসম জাতীয় অপেক্ষক পাওয়া হয়। কিন্তু এই দুই অপেক্ষকই হোমোথেটিক অপেক্ষক।

হোমোথেটিক অপেক্ষকের সংজ্ঞা ঃ

কোনো অপেক্ষক $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ হোমোথেটিক হবে যদি এই অপেক্ষক, সমজাতীয় অপেক্ষকের একঘেয়ে রূপান্তর হয়। ভিন্নভাবে বলতে গেলে, $y \to f(y) \in R_+$, এই ধরনের একটি একঘেয়ে রূপান্তর যদি নেওয়া যায়, এবং একটি সমজাতীয় অপেক্ষক $g : R^n{}_+ \to R_+$ ভাবা যায় যেখানে h(x) = f(g(x)) হবে x এর সকল ক্ষেত্রের জন্য তাহলে সেক্ষেত্রে হোমোথেটিক অপেক্ষক হবে। এই অপেক্ষকের একঘেয়ে রূপান্তর, অপেক্ষকটির ক্রমভিত্তিক ধর্ম নির্দেশ করে।

কোনো অপেক্ষকের ক্রমভিত্তিক ধর্ম তখনই থাকে যদি তার প্রত্যেকটি একঘেয়ে রূপান্তরই অপেক্ষকটির মূলধর্ম বজায় রাখে। কিন্তু একঘেয়ে রূপান্তরটির পর মূল অপেক্ষকের সংখ্যাভিত্তিক ধর্ম বজায় থাকে না।

উদাহরণ ঃ (১) (ক) $z = e^{x^2y}e^{xy^2}$ অপেক্ষকটি হোমোথেটিক অপেক্ষক?

(খ) $2\log x + 3\log y$ কি হোমোথেটিক অপেক্ষক?

সমাধান ঃ ধরা যাক $z_1' = x^2y + xy^2$

সুতরাং x ও y চলকদের λ গুণ পরিবর্তন করলে পাওয়া যাবে

$$z_1' = (\lambda x)^2(xy) + \lambda x(\lambda y)^2$$
$$= \lambda^3x^2y + \lambda^3xy^2$$
$$= \lambda^3 z_1$$

সুতরাং z_1 হলো ত্রিমাত্রিক সমজাতীয় অপেক্ষক।

এখন $z = e^{z1}$ যেখানে $z = \phi(z_1)$ $\phi' > 0$ একটি সমজাতীয় অপেক্ষকের একঘেয়ে রূপান্তর। সুতরাং প্রদত্ত অপেক্ষকটি হোমোথেটিক অপেক্ষক।

(খ) ধরা যাক $Z = x^2y^3$

x ও y কে λ গুণ পরিবর্তন করলে পাই ঃ

$Z_1 = (\lambda x)^2 \,.\, (\lambda y)^3 + \lambda^5 x^2 y^3 = \lambda^5 z.$

অর্থাৎ $Z = x^2y^3$ একটি সমজাতীয় অপেক্ষক, যার সমজাতীয়তার মাত্রা হলো 5

এখন $\log z = 2 \log x + 3 \log y$

$\therefore$ $v = \log z$ অপেক্ষকের $v' > 0$; অর্থাৎ v হলো সমজাতীয় অপেক্ষক z এর একঘেয়ে রূপান্তর, তাই v হলো হোমোথেটিক অপেক্ষক।

5.9 দুটি বিশেষ উপপাদ্য

প্রথম উপপাদ্য ঃ কঠোরভাবে একঘেয়ে অপেক্ষক $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ হোমোথেটিক হবে কেবলমাত্র যদি সকল x ও y এর জন্য, যা এ সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow f(tx) \geq f(ty) \forall$$

দ্বিতীয় উপপাদ্য ঃ $\mathbb{R}^n$ এ সংজ্ঞায়িত কোনো হোমোথেটিক অপেক্ষক f এর জন্য, f এর লেভেল সেটের, স্পর্শকতলগুলির গ্র্যাডিয়েন্ট, মূলবিন্দু থেকে উৎপন্ন রশ্মিগুলির উপর ধ্রুবক হবে। (For a homothelic function f on Rn, the gradient of the tangent planes to the level sets of f are constant along rays the rays from the origin).

সুতরাং $$\frac{\partial f(tx)}{\partial xi} \Big/ \frac{\partial f(tx)}{\partial xj} = \frac{\partial f(x)}{\partial xi} \Big/ \frac{\partial f(x)}{\partial xj}$$

সমস্ত $t > 0$ এর জন্য।

কিন্তু এর উল্টোটা সত্য নয়।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে যদি $H = Q^2$ হয় যেখানে $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ হবে; তা দ্বিতীয় উপপাদ্য সাধন করে।

সমাধান ঃ $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ যদি একটি উৎপাদন অপেক্ষক হয় যেহেতু সম্প্রসারণ পথের (expansion path) প্রতিটি বিন্দুতে $\dfrac{P_a}{P_b} = \dfrac{Q_a}{Q_b} = \dfrac{A\alpha a^{\alpha-1}b^{\beta}}{A\beta a^{\alpha}b^{\beta-1}} = \dfrac{\alpha b}{\beta a}$

অর্থাৎ সর্বোত্তম ইনপুট অনুপাত ঃ $\dfrac{b^*}{a^*} = \dfrac{\beta P_a}{\alpha P_b}$ = ধ্রুবক।

Q সমোৎপাদন এর বা $Q(a,b)=\overline{Q}$ দ্বারা যে সমোৎপাদন রেখা উৎপন্ন হয় তার

নতি ঃ $\frac{-Q_a}{Q_b}=-\frac{\beta P_a}{\alpha P_b}$

Q(a, b) একটি সমজাতীয় অপেক্ষক যার সমজাতীয়তার মাত্রা $(\alpha + \beta)$।

এখন $H = Q^2 \therefore h'(\theta)=2\theta>0$ যখন $Q > 0$.

$\therefore$ H(a, b) হলো হোমোথেটিক অপেক্ষক।

$$H=\theta^2=\left(Aa^{\alpha}b^{\beta}\right)^2=A^2a^{2\alpha}b^{2\beta}$$

$$\therefore -\frac{H_a}{H_b}=\frac{A^2 2\alpha a^{2\alpha-1}b^{2\beta}}{A^2\alpha^{2\alpha}2\beta b^{2\beta-1}}=-\frac{\alpha b}{\beta a}=-\frac{\theta_a}{\theta_b}$$

H(a, b) ও $2(\alpha + \beta)$ সমজাতীয়তা মাত্রা বিশিষ্ট একটি সমজাতীয় অপেক্ষক।

উদাহরণ ২। দেখাও যে $H = e^Q$ যেখানে $Q = Aa^{\alpha}b^{\beta}$ সেখানে H(a, b) হোমোথেটিক কিন্তু সমজাতীয় অপেক্ষক নয়।

সমাধান ঃ Q = Q(a, b) ; $(\alpha + \beta)$ সমজাতীয়তা মাত্রাবিশিষ্ট একটি সমজাতীয় অপেক্ষক।

$H = e^{\theta}$ সুতরাং অর্থাৎ H(a, b) হোমোথেটিক অপেক্ষক।

$$-\frac{H_a}{H_b}=-\frac{A\alpha a^{\alpha-1}b^{\beta}e^{Aa^{\alpha}b^{\beta}}}{Aa^{\alpha}\beta b^{\beta-1}e^{Aa^{\alpha}b^{\beta}}}=-\frac{\alpha b}{\beta a}$$

$$H(\lambda a,\lambda b)=e^{\left[A(\alpha a)^{\alpha}(\lambda b)^{\beta}\right]}$$

$$=e^{A>^{\alpha+b}\cdot a^{\alpha}b^{\beta}}$$

$$=\left[e^{Aa^{\alpha}b^{\beta}}\right]^{\lambda^{\alpha+b}}=\left[H(a,b)\right]^{\lambda^{\alpha+\beta}}\neq\lambda^{\alpha+\beta}H(a,b)$$

5.10 সংক্ষিপ্তসার

সমগ্র অধ্যায়টিতে শৃঙ্খল নিয়ম সংক্রান্ত বিধি সমাধান পদ্ধতি, আংশিক স্থিতিশীল ও সমজাতীয় ও হোমোথেটিক অপেক্ষকের প্রকৃতি ও সমাধান বিশদভাবে দেখানো হয়েছে।

5.11 প্রশ্নাবলী

1. নীচের প্রতিটি প্রশ্নের পূর্ণমান 2

(a) চেইন রুলের সাহায্যে অবকলন করো ঃ

$f(x) = (x^2 + 1)^7$

(b) $f(x) = (3x^2 - 4x + 5)^8$ কে চেইন রুলের মাধ্যমে অবকলন করো।

(c) $Z = xy$ অপেক্ষকটির লেভেল রেখা কি হবে?

(d) $Z = x^2 + y^2$ কি সমজাতীয় অপেক্ষক? তাহলে তার মাত্রা কতো?

(e) যদি A দ্রব্যের চাহিদা হয় $q = 13 - 2p_1 - 3p_2^2$ তাহলে আংশিক স্থিতিস্থাপকতা $\frac{Eq}{Ep_1}$ ও $\frac{Eq}{Ep_2}$ নির্ণয় করো যখন $p_1 = p_2 = 2$.

2. নীচের প্রশ্নগুলির পূর্ণমান 5

(a) যদি X দ্রব্যের চাহিদা রেখার সমীকরণ হয় $Q_1 = 200 - 5P_1 + 4P_2$ ও Y দ্রব্যের ক্ষেত্রে হয় $Q_2 = 300 + 2P_1 - 4P_2$

তাহলে X ও Y বিপরীত স্থিতিস্থাপকতার মান কতো হবে যেখানে $P_1 = 20$, $P_2 = 20$? X ও Y এর মধ্যে সম্পর্ক কি?

(b) $z = 4x^{3/4}y^{\frac{1}{4}}$ এর ক্ষেত্রে অয়লার উপপাদ্য কি খাটে?

(c) অয়লার উপপাদ্য অবলম্বনে দেখাও যে যদি উৎপাদনের মাত্রা ধ্রুবক থাকে (constant returns to scale) তাহলে

(i) যখন $MPP_K = 0$, $APP_L = MPP_L$

(ii) যদি $MPP_L = 0$, $APP_K = MPP_K$

(d) $f(x, y, w) = x^4 - 5yw^3$ কি সমজাতীয় অপেক্ষক? যদি হয় তাহলে তার মাত্রা কত?

(e) $Z =$ এর সমজাতীয়তার মাত্রা নির্ণয় করো।

3. নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণমান 10

(a) একটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখাও যে হোমোথেটিক অপেক্ষককে সমজাতীয় হতেই হবে তা বলা যায় না।

(b) $Z = \log x + \log y$ অপেক্ষকটি সমজাতীয়? এটি কি হোমোথেটিক?

(c) চেইন রুলের মাধ্যমে অবকলন করো ঃ

(i) $y = (x^2 + 3x + 1)^5$

(ii) $y = -3(x^2 - 8x + 7)^4$

(d) অয়লার উপপাদ্য n চলকের ক্ষেত্রে কিভাবে দেখানো যায় যেখানে উৎপাদন অপেক্ষকটি সরলরৈখিক সমজাতীয়তা বজায় রাখে?

(e) $z = e^{x^2 y}$ অপেক্ষকটি কি হোমোথেটিক?

5.12 গ্রন্থপঞ্জি

1. Henderson, J.M and Quandt R.E (1980) : Microeconomic Theory : A mathematical Approach.
2. Sydsacter and Hammond : The essential Mathematics for Economic Analysis.

একক 6 ❑ বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের পরম অবস্থা

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠে অপেক্ষকের চরিত্র, প্রকৃতি এবং তার সর্বোচ্চ সীমায় পৌঁছানোর আবশ্যকীয় শর্তাবলী জানা যাবে।

6.2 প্রস্তাবনা

একটি প্রদত্ত অর্থনৈতিক এককের (unit) সাম্যাবস্থায় পৌঁছানো বলতে পরম মান (Optimum) পৌঁছানো বোঝায়। এই পরম মান কিভাবে নির্ধারণ করা যাবে বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের ভিত্তিতে তা দেখানো হয়েছে।

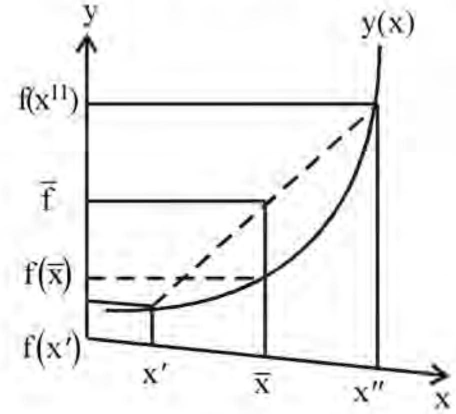
6.3 উত্তল অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য

উত্তল অপেক্ষকের (convex function) বৈশিষ্ট্য বোঝার আগে উত্তল অপেক্ষকের ধারণাটির সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা আবশ্যক।

6.3.1 সংজ্ঞা ঃ

প্রথম সংজ্ঞা ঃ একটি অপেক্ষক $f : \hbar^{n} \rightarrow \hbar$ উত্তল হবে যদি এর ডোমেইন (Domain) একটি উত্তল সেট হয় এবং এই ডোমেইনের সকল x, y এর জন্য এবং সকল $\lambda \in [0, 1]$, এর জন্য $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ হয়।

অর্থাৎ যদি কোনো অপেক্ষকের উপর x, y দুটি বিন্দু নেওয়া হয়, তাহলে এদের যে কোনো উত্তল মিশ্রণেই (convex combination) f এর মান নির্ণয় করা হোক না কেন, তা কোনো ভাবেই f(x) ও f(y) এর একই উত্তল সংমিশ্রণ অপেক্ষা বেশী হবে না। জ্যামিতিক অর্থে, (x, f(x)) ও (x, f (y)) এর সংযুক্তি রেখা f এর রেখাচিত্রের উপরে অবশ্যই অবস্থান করবে। চিত্র নং ১ এ এটা দেখানো হলো।

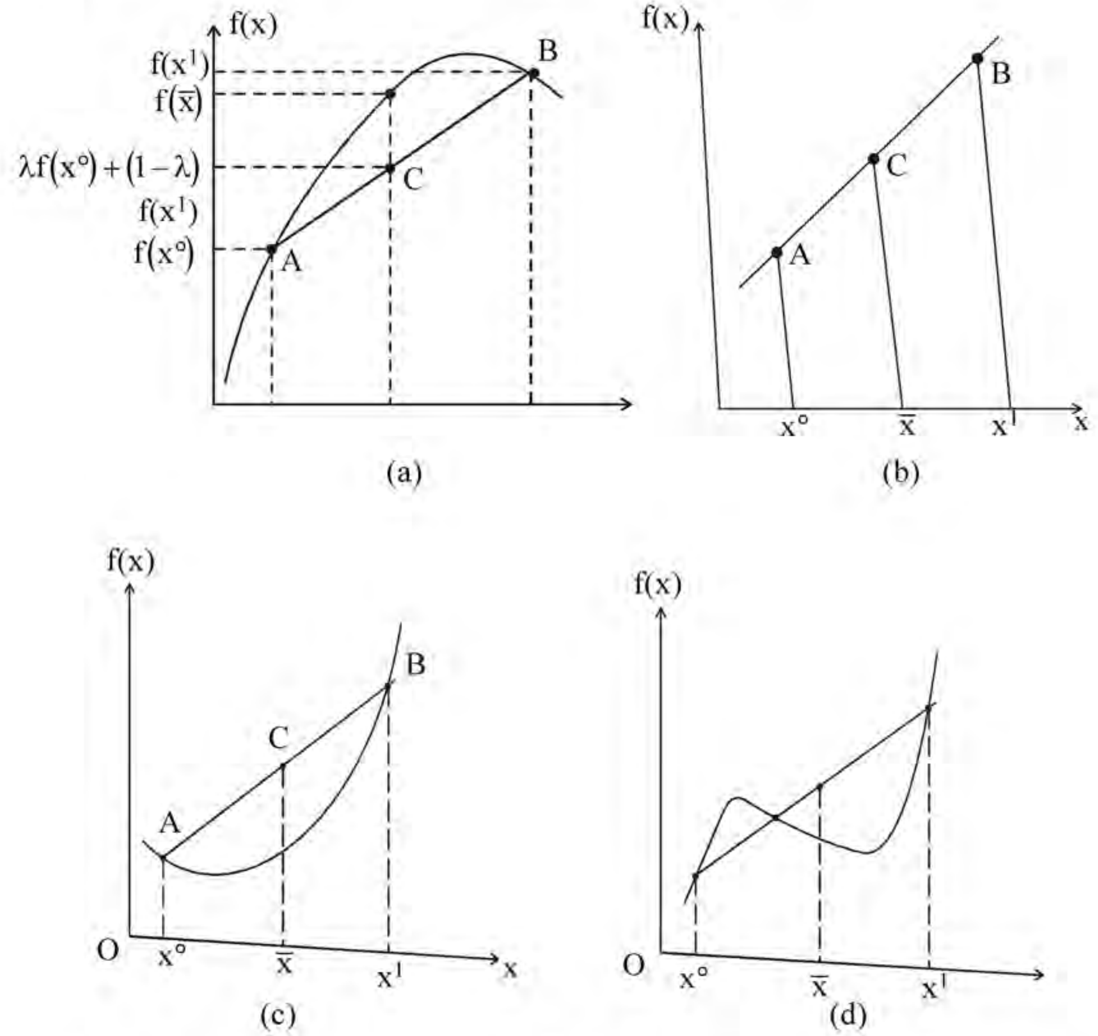


এখানে $x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' f(x)$ রেখার উপরিস্থিত বিন্দুদ্বয় হলো x' ও x'' এবং $x \in [0, 1]$।

যদি অসমচিহ্ন কঠিন হয় (strict enequality) হয় অর্থাৎ $f(\overline{x}) < \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x'')$ হয় তাহলে f(x) রেখা চরম বা কঠিনভাবে উত্তল হবে (strictly convex)। যে রেখাচিত্র চিত্র ১ এ দেখানো হয়েছে সেটি চরম উত্তল রেখা।

একইভাবে f যদি উত্তল হয় তবে –f হবে অবতল।

নীচের চিত্রে (চিত্র ২) চার ধরনের অপেক্ষকের রেখাচিত্র দেখানো হল।



চিত্র 2a তে লক্ষণীয় এই যে যদি ওই রেখাচিত্রটির উপর x^0 ও x^1 যে কোনো দুটি বিন্দু নেওয়া হয়, এবং তাদের প্রতিযঙ্গিক অপেক্ষক মান (corresponding function values) যথাক্রমে $f(x^0)$ ও $f(x^1)$ কে একটি সরলরেখার মাধ্যমে যুক্ত করা হয়, তাহলে এই দুটি মানের মধ্যে অবস্থিত অপেক্ষকটির রেখাচিত্র সম্পূর্ণরূপে উক্ত সরলরেখা বা জ্যা-এর উপর (chord to the function) অবস্থান করবে। এক্ষেত্রে রেখাচিত্রটি অবতল অপেক্ষক নির্দেশ করবে। চিত্র 2(b) র ক্ষেত্রে ঠিক উল্টো ঘটনা হবে এবং ঐ রেখাচিত্রটি উত্তল হবে।

চিত্র 2(c) এর ক্ষেত্রে অপেক্ষকটির রেখাচিত্র সম্পূর্ণরূপে সরলরেখাটির সাথে মিশে যাবে। এই ক্ষেত্রে রেখাচিত্রই সরলরেখা বা linear হবে। আবার চিত্র 2(d) তে অবতল ও উত্তল দুটি ক্ষেত্রেই লক্ষ্য করা যায়।

এক্ষেত্রে দুটি বিষয় আলোচনা করা আবশ্যক।

(১) x^0 ও x^1 এই বিন্দুর মধ্যে অবস্থিত x এর যে কোনো মান $\overline{x}$ কে x^0 ও x^1 এর ভরযুক্ত গড় (weighted average) হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। অর্থাৎ $\overline{x} = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^1$ যেখানে $< \lambda < 1$ হবে। হলো x^0 ও x^1 এর উত্তল সংমিশ্রণ (convex combination)

(২) যদি $f(x^0)$ ও $f(x^1)$ এই দুই অপেক্ষক মানের ভরযুক্ত গড় নেওয়া যায় λ এর একই মানের ভিত্তিতে, এবং এই ভরযুক্ত গড়কে $\overline{f} = \lambda f(x^0) + (1-\lambda)f(x^1)$ দিয়ে সূচিত করা যায়। তাহলে এই কে বরাবর, AB জ্যায়ের উপর অবস্থিত C বিন্দুতে বা উল্লম্ব অক্ষে পরিমাপ করতে হবে।

অবতল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\overline{f}(x) \geq \overline{f}$ হয় এবং কঠোরভাবে অবতল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $f(\overline{x}) > \overline{f}$ হবে। x^0 এবং x^1 এর মধ্যে যে কোনো বিন্দুতে x এর অবস্থান হলে। যখন অপেক্ষকটি রৈখিক (linear) হবে তখন $f(x) = \overline{f}$ হবে (চিত্র 2c)।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $f(x) = x^2$ একটি উত্তল অপেক্ষক।

ধরা যাক [c, d] C I, (I হলো interval বা পরিসর) এবং O < t < 1.

$$f[1 - t)C + td] = (1 - t)^2 c^2 + 2t(1 - t)cd + t^2d^2$$

$$= (1 - t)c^2 - t(1 - t)c^2 + 2t(1 - t)cd + t^2d^2$$

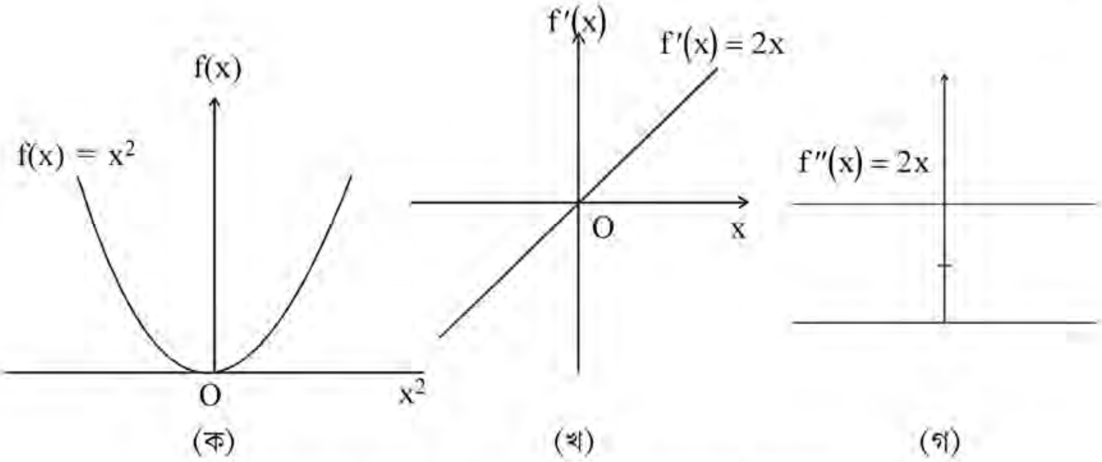
$$= (1 - t)c^2 - t(1 - t)c\ (2d - c) + t^2d^2 - td^2 + td^2$$

$$= (1 - t)c^2 - t(1 - t)(c - d)^2 + td^2 \leq (1 - t)c^2 + td^2$$

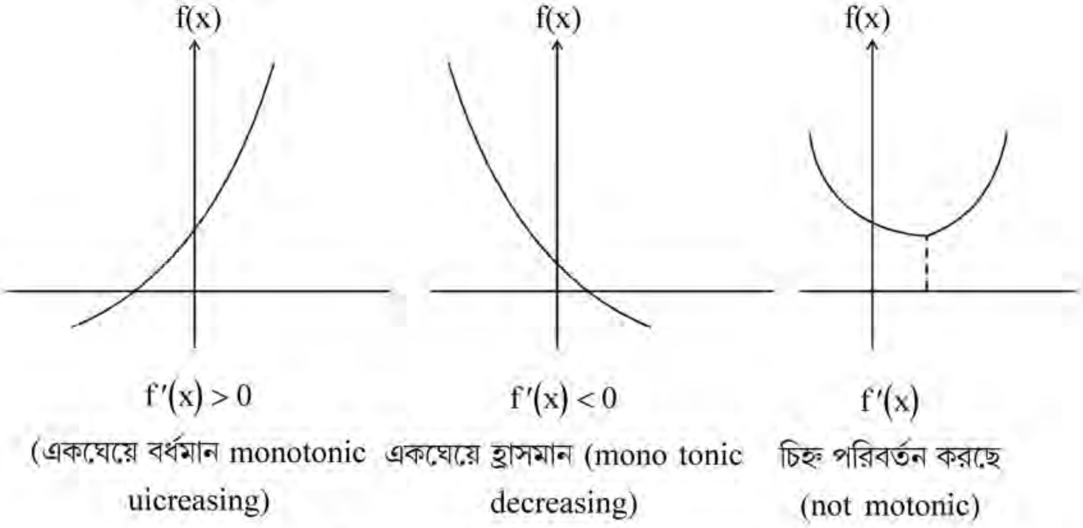
$\therefore$ $f(x) = x^2$ হলো উত্তল অপেক্ষক।

6.4 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে উত্তলতার ধারণা ঃ

যদি f(x) পরপর দুইবার অন্তরকলনযোগ্য হয় (twice differentiable function) তবে সেটা উত্তল ¥ơï ë!˜ •þÿ ûöÇþœî û(domain) প্রতিটি বিন্দুতে $f''(x) > 0$ হয়। পরপর দুইবার অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক f(x) কঠোরভাবে উত্তল হবে যদি f(x) > 0 হয়, সম্ভবতঃ কোনো একক বিন্দু ছাড়া (except possibly at a single point) একটি রৈখিক অপেক্ষক ও উত্তলতার সংজ্ঞা অনুসারে উত্তল। চিত্র ৩ এর সাহায্যে উত্তলতা এবং ক্রমাগত বর্ধমান, হ্রাসমান ও একঘেয়ে নয় (monotonic increasing, monotonic decreasing and not monotonic) এমন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উত্তল অপেক্ষকের ধারণা স্পষ্ট করা হলো।



চিত্র ৩(i) $f(x)x^2, x \in \mathbb{R}$ এবং তার প্রথম দুই অবকল



চিত্র ৩(ii) কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকের সম্ভাব্য গঠন।

চিত্র ৩(i) এ কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকটি $f(x) = x^2$ তার পরস্পর দুই অবকলের চিত্র সহযোগে দেখানো হয়েছে। দ্বিতীয় অবকলটি সম্পূর্ণরূপে ধনাত্মক। যদি $f(x) = x^4$ হয় তাহলে $f''(x) = 12x^2$ হবে, তবে এক্ষেত্রে $f''(x)$ ধনাত্মক হবে যদি $x = 0$ হয়। সেইজন্য কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সংজ্ঞাটিকে বলা হয় $f(x) > 0$ কেবলমাত্র সম্ভবত একটি বিন্দু ব্যতীত ($f''(x) > 0$ except at one point)।

চিত্র ৩(ii) কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক দেখানো হয়েছে যেখানে অপেক্ষকটি একঘেয়েভাবে বর্ধমান, হ্রাসমান ও একঘেয়ে নয়।

যদি f(x) এই অপেক্ষকটি দুবার অবকলনযোগ্য হয় (twice differentiable) তবে তা অবতল হবে যদি $f(x) < 0$ হয় এর ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর জন্য এবং f কঠোরভাবে অবতল হবে যদি $f(x) < 0$ হবে এর ক্ষেত্রের কেবলমাত্র সম্ভবতঃ একটি বিন্দু ব্যতীত সবকটি বিন্দুতে।

উদাহরণ ঃ $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 3x^2 - 5x + 10$ যেখানে $x \geq 0$

উক্ত অপেক্ষকটির চিত্র বর্ণনা করো ও আকৃতির ব্যাখ্যা করো।

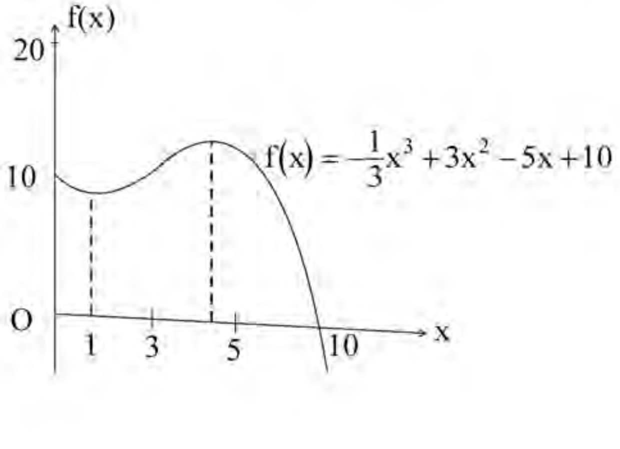
সমাধান ঃ $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$ এবং $f''(x) = -2x + 6$ যেহেতু $x < 3$ হলে $f''(x) > 0$ এবং $x > 3$ হলে $f''(x) < 0$, সুতরাং [0, 3] এই পরিসরে (interval) অপেক্ষকটি কঠোরভাবে উত্তল এবং $[3, +\infty)$ এই পরিসরে কঠোরভাবে অবতল। নীচের সারণটিতে x = 0, 1, ..., 8 এই মানগুলির জন্য অপেক্ষকটির মান ও তার প্রাতিষঙ্গিক প্রথম ও দ্বিতীয় অবকলনের মান প্রদত্ত হলো।

x	f(x)	f′(x)	f″(x)
0	10.00	–5.00	6.00
1	7.67	0.00	4.00
2	9.33	3.00	2.00
3	13.00	4.00	0.00
4	16.67	3.00	–2.00
5	18.33	0.00	–4.00
6	16.00	–5.00	–6.00
7	7.67	–12.00	–8.00
8	–8.67	–21.00	–10.00

$f'(x) = -(x-5)(x-1)$

লক্ষণীয় যে x এর যে বিন্দুতে $f'(x) = 0$ সেখানে অপেক্ষকটি বাড়বেও না। কমবে ও না এবং ওই বিন্দুতে flat থাকবে।

এখন উৎপাদন বিশ্লেষণ করলে $f'(x) = -(x-5)(x-1)$ $f'(x) = 0$ হবে $x = 1$ ও $x = 5$ হলে। এবং $x < 3$ হলে দ্বিতীয় অবকল ধনাত্মক হবে এবং রেখাটি উত্তল হবে এবং $x > 3$ হলে $f''(x) < 0$ হবে ও রেখাটি অবতল হবে।



উদাহরণ (২) পরীক্ষা করো নিম্নলিখিত অপেক্ষকদ্বয় x = 3 বিন্দুতে উত্তল কি অবতল?

(ক) $y = -2x^3 + 4x^2 + 9x - 15$

(খ) $y = (5x^2 - 8)^2$

সমাধান ঃ (ক) $y'(x) = -6x2 + 8x + 9$

$y''(x) = 12x + 8$

$y''(3) = -12 \times 3 + 8 = -28 < 0$ অবতল।

(খ) $y'(x) = 2(5x^2 - 8)(10x)$

$= 20x(5x^2 - 8)$

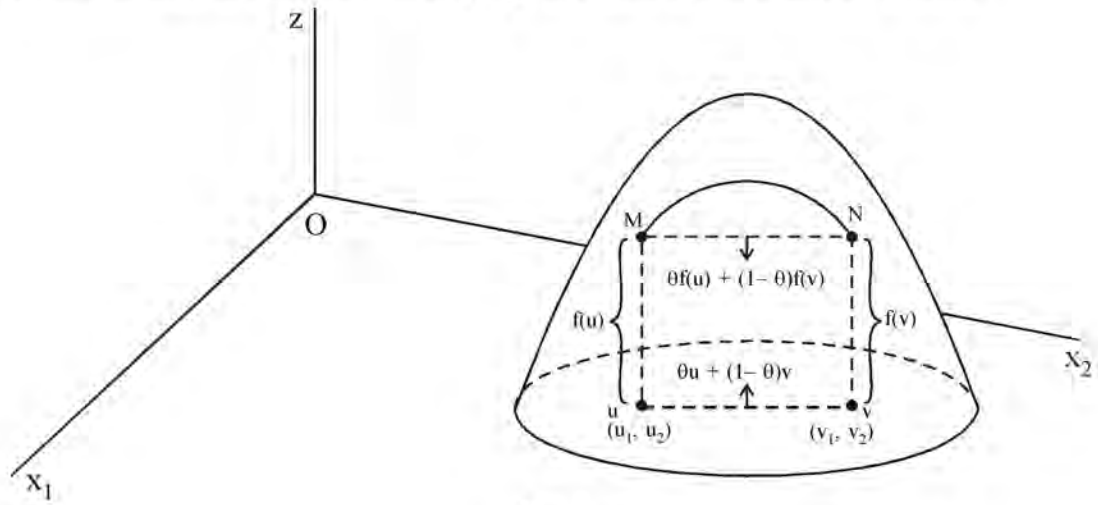
$= 100x^3 - 160x$

$y''(x) = 300x^2 - 160$

$y''(3) = 300 \times 9 - 160 = 2540 > 0$ উত্তল।

6.5 উত্তল অপেক্ষকের ধারণা

দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক $z = f(x_1, x_2)$ এর ক্ষেত্রে বলা যায় যে, সেটি অবতল (উত্তল) হবে কেবলমাত্র যদি, যে কোনো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু M এবং N, অপেক্ষকটির তলে (surface) নেওয়া যায়, তবে MN এই খণ্ডাংশ (line segment) হয় উক্ত তলের উপর বা নীচে (উপরে) অবস্থান করবে। যদি অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল (উত্তল) হয় তবে খণ্ডাংশটি (line segment) অর্থাৎ MN সম্পূর্ণভাবে উক্ত অপেক্ষক দ্বারা আবদ্ধ তলের নীচে (উপরে) অবস্থান করবে কেবলমাত্র M ও N ছাড়া (চিত্র 8)। চিত্র 8 এ দেখা যায় যে কঠোরভাবে অবতল অপেক্ষকটির তলের উপর M এর N এই দুই বিন্দু জ্যা ও চাপ দ্বারা যুক্ত করা হয়েছে। এখানে চাপটি জ্যা-এর উপর অবস্থিত। এখানে তলটি সম্পূর্ণ গম্বুজাকৃতি হবে। যদি কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক হয় $Z = f(x_1, x_2)$ তবে তলটি হবে বাটি আকৃতির (Bowl)।



চিত্র 8

যদি $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$, $z = f(x_1, x_2)$ এর ক্ষেত্রে বা ডোমেইনে দুটি সুস্পষ্ট ক্রমিত জোড় (Ordered pair) তাহলে এই u ও v এর প্রাতিষঙ্গিক z এর মান বা পৃষ্ঠতলের উচ্চতা (height of surface) হবে $f(u) = f(u_1, u_2)$ ও $f(v) = f(v_1, v_2)$ যথাক্রমে। যেহেতু চলক দুটির প্রকৃত মান ধরা হয়েছে (real value) সুতরাং uv রেখাংশতে অবস্থিত সকল বিন্দুই z এর ডোমেইনে থাকবে। এবার উক্ত রেখাংশটিকে u ও v এর ভরযুক্ত গড় বলা যাবে এবং একে $Qu + (1 - \theta)v$ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে যেখানে Q একটি স্কেলার যার মান 0 এবং 1 এর মধ্যে থাকবে বা $0 < Q < 1$ আবার MN রেখাংশ, f(u) ও f(v) র ভরযুক্ত গড়কে একইভাবে প্রকাশ করা যাবে বা $Qf(u) + (1 - \theta) f(v)$ হিসাবে লেখা যাবে যেখানে $0 \leq Q \leq 1$ হবে। এখন MN রেখা দ্বারা আবদ্ধ চাপ (arc) নির্দেশ করে uv এই রেখাংশটির বিভিন্ন বিন্দুতে f অপেক্ষকটির মান অর্থাৎ $f[Qu + (1 - \theta) v]$। সুতরাং বীজগাণিতিক পদ্ধতি অবলম্বনে দেখা যাবে ঃ একটি অপেক্ষক অবতল বা উত্তল হবে কেবলমাত্র তখনই, যখন (iff) f এর ডোমেইনে যে কোনো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু u, এবং v এর জোড়ার জন্য এবং $0 < Q < 1$ এর জন্য।

$$\underbrace{\theta f(u)+(1-\theta)f(v)}_{\text{রেখাংশের উচ্চতা}} \leq \underbrace{f[\theta(u)+(1-\theta)v]}_{\text{জ্যামের উচ্চতা}}$$

(এটি অবতল অপেক্ষকের শর্ত)

অথবা $\theta f(u)+(1-\theta)f(v) \geq f[\theta(u)+(1-\theta)v]$ (এটি উত্তল অপেক্ষকের শর্ত) ....(১)

উদাহরণ ঃ $z = x_1^2 + x_2^2$ অপেক্ষকটি উত্তল বা অবতল পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$ z এর ক্ষেত্রে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$$f(u) = f(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$$

$$f(v) = f(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2$$

এবং $f[\theta u+(1-\theta)v] = f[\underbrace{\theta u_1+(1-\theta)v_1}_{x_1 \text{ এর মান}}, \underbrace{\theta u_2+(1-\theta)v_2}_{x_2 \text{ এর মান}}]$

$$= [\theta u_1+(1-\theta)v_1]^2 + [\theta u_2+(1-\theta)v_2]^2$$

উত্তল বা অবতলের সংজ্ঞা অবলম্বনে (১) এ বসিয়ে ডানদিকের পদকে বাঁদিকের থেকে বিয়োগ এবং সরল করলে পাওয়া যাবে ঃ

$$\theta(1-\theta)(u_1^2+v_2^2)+\theta(1-\theta)(v_1^2+v_2^2)-2\theta(1-\theta)(u_1v_1+u_2v_2)$$

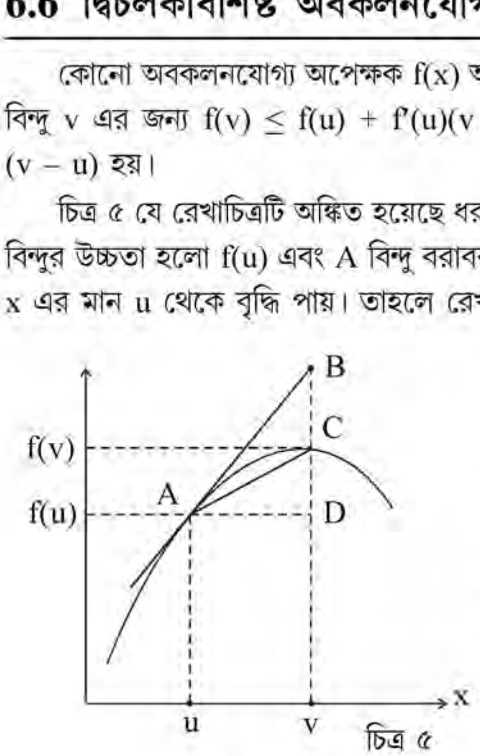
$$= \theta(1-\theta)[(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2] > 0$$

যেহেতু $0 < \theta < 1$ $\therefore \theta$ ও $(1 - \theta)$ উভয়েই ধনাত্মক। যেহেতু (u_1, u_2) ও (v_1, v_2) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাতে হয় $u_1 = v_1$ বা $u_2 \neq v_2$ (অথবা উভয়ই), সুতরাং বন্ধনীর মধ্যের পদকে (expression) ধনাত্মক হতেই হবে। $\therefore$ কঠোরভাবে > 0 অসম চিহ্ন নির্দেশ করবে $z = x_1^2 + x_2^2$ একটি কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক।

6.6 দ্বিচলকবিশিষ্ট অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উত্তলতর সংজ্ঞা

কোনো অবকলনযোগ্য অপেক্ষক $f(x)$ অবতল হবে যদি একটি প্রদত্ত বিন্দু u এবং অপর যে কোনো বিন্দু v এর জন্য $f(v) \leq f(u) + f'(u)(v - u)$ হবে এবং উত্তল হবে যদি $f(v) \geq f(u) + f'(u)(v - u)$ হয়।

চিত্র ৫ যে রেখাচিত্রটি অঙ্কিত হয়েছে ধরা যাক A হলো ওই রেখাচিত্রের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। A বিন্দুর উচ্চতা হলো $f(u)$ এবং A বিন্দু বরাবর রেখাচিত্রের উপর AB স্পর্শক অবস্থান করছে। ধরা যাক x এর মান u থেকে বৃদ্ধি পায়। তাহলে রেখাচিত্রটি যদি কঠোর অবতল হয়, তাহলে একটি পাহাড়ের আকৃতির মত রেখাটি AB স্পর্শক থেকে বেঁকে যাবে এমনভাবে, যাতে C বিন্দু, যার উচ্চতা $f(v)$, সেটি B বিন্দুর নীচে থাকে। এক্ষেত্রে AC এই রেখাংশটির নতি, AB এই স্পর্শকের তুলনায় কম হবে। যদি রেখাচিত্র কঠোর অবতল না হয় তবে AC এই চাপটি হয়তো কিছুটা সরলরেখাংশ হতে পারে এবং কিছুটা AB স্পর্শকের সঙ্গে এক হতে পারে। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে, AC র নতি AB র নতির সঙ্গে সমান হয়। এই দুই অবস্থাকে একসাথে করে বলা যায় ঃ



চিত্র ৫

AC রেখাংশের ঢাল $\dfrac{DC}{AD} = \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq$ AB রেখার ঢাল $= f'(u)$

অথবা $f(v) \leq f(u) + f'(u).(v - u)$ যা অবতল অপেক্ষক নির্দেশ করে।

অর্থাৎ যদি কোনো অপেক্ষক $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ দুইবার ক্রমাগত অবকলনযোগহ্য হয় তাহলে তার আংশিক অবকল বর্তমান থাকে, এবং d^2z সংজ্ঞায়িত হয়। এই অপেক্ষক অবতল যদি d^2z সর্বত্র ঋণাত্মক আধা নির্দিষ্ট (semi definite) হয়। যদি উক্ত অপেক্ষকটি কঠোর অবতল হয় তাহলে d^2z সর্বত্র ঋণাত্মক নির্দিষ্ট (negative definite) হবে। কঠোর উত্তলের ক্ষেত্রে d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট এবং উত্তলের ক্ষেত্রে আধা ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে।

উদাহরণ ঃ $z = x_1^2 + x_2^2$ এর অবকলন শর্ত অনুসারে উত্তলতা পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$ দুটি বিন্দু।

সুতরাং উত্তল ও অবতলের সংজ্ঞা অবলম্বনে বামপক্ষ ঃ $v_1^2 + v_2^2$,

ডানপক্ষ $u_1^2 + u_2^2 + 2u_1(v_1 - u_1) + 2u_2(v_2 - u_2)$

ডানদিককে বাঁদিকের থেকে বাদ দিলে পাই ঃ

$$v_1^2 - 2v_1u_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2v_2u_2 + u_2^2 = (v_1 - u_1)^2 + (u_2 - u_2)^2$$

যেহেতু $(v_1, v_2) \neq (u_1, u_2) \therefore$ এই বিয়োগফল সবসময় ধনাত্মক। $\therefore z = x_1^2 + x_2^2$ কঠোর উত্তল। আবার যদি d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট কিনা বিচার করা হয় তবে

$$f_1 = 2x_1 \quad f_2 = 2x_2 \qquad f_{11} = 2 > 0 \text{ এবং } \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$\therefore$ d^2z সর্বত্র ধনাত্মক নির্দিষ্ট ও উত্তল।

একচলক বিশিষ্ট উত্তল অপেক্ষকের উদাহরণ (Examples of univariate convex functions) :

(a) e^{ax} (b) $-\log(x)$ (c) x^a ($\hbar_{++}$এ সংজ্ঞায়িত); $a \geq 1$ বা $a \leq 1$

(d) $-x^a$ ($\hbar_{++}$ সংজ্ঞায়িত), $0 \leq a \leq 1$

(e) $|x|^a, a \geq 1$

(f) x log (x) ($\hbar_{++}$ এ সংজ্ঞায়িত)।

6.7 বহুচলকবিশিষ্ট উত্তল অপেক্ষকের উদাহরণ

(a) অ্যাফাইন অপেক্ষক (Affine function) ঃ $f(x) = a^Tx + b$ যে কোনো ($a \in \hbar^n, b \in \hbar$) অপেক্ষক উত্তল, কিন্তু কঠোর উত্তল নয়, আবার অবতলও।

$$\forall \text{ (for all) } \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$$= a^T(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b$$

$$= \lambda a^T x + (1 - \lambda)a^T y + \lambda b + (1 - \lambda)b$$

$$= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

অ্যাফাইন অপেক্ষক হলো একমাত্র অপেক্ষক যা একসঙ্গে উত্তল এবং অবতল হতে পারে।

(b) কিছু দ্বিঘাত অপেক্ষক (Some quadratic function) : $f(x) = x^TQx + C^Tx + d$

— উত্তল হবে কেবলমাত্র যদি $Q > 0$ হয়।

— কঠোর উত্তল কেবলমাত্র যদি $Q > 0$ হয়।

— অবতল কেবলমাত্র যদি $Q < 0$; এবং কঠোর উত্তল কেবলমাত্র যদি $Q < 0$ হয়।

(c) যে কোনো নর্ম (Any norm) : নর্ম হোলো এমন এক অপেক্ষক f যেখানে নিম্নলিখিত শর্তগুলি সাধিত হয়।

(a) $f(ax) = |a| f(x) \forall a \in \hbar$

(b) $f(x+y) \leq 0$; $\forall x, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(c) $f(x) \geq 0$; $\forall x, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

6.8 উত্তল অপেক্ষকের ধর্ম

উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে নিম্ন উদ্ধৃত ধর্মগুলি লক্ষ্য করা যায়।

(ক) যদি কোনো অপেক্ষক $f, g : \hbar^n \to \hbar$ উত্তল হয়, তবে f + g ও উত্তল হয়।

(খ) যদি $f : \hbar^n \to \hbar$ উত্তল হয় এবং $\lambda \geq 0$ হয়, তবে λf ও উত্তল হবে।

(গ) প্রত্যেক রৈখিক (linear) বা অ্যাফাইন অপেক্ষক উত্তল হবে।

(ঘ) যদি f ও –f উভয়েই উত্তল হয়, তবে f একটি অ্যাফাইন অপেক্ষক হবে।

(ঙ) যদি f ও g উত্তল অপেক্ষক হয়, তবে h অপেক্ষক সেখানে h(x) = max{f(x), g(x)} ও উত্তল হবে।

প্রথম ধর্মটির একটি প্রমাণ দেওয়া যাক। প্রমাণ করো যে যদি f(x) ও g(x) উভয়েই অবতল (উত্তল) হয়। যদি f(x) ও g(x) উভয়ই অবতল (উত্তল) এবং সেই সঙ্গে দুটির যে কোনোটি বা উভয়েই কঠোর অবতল (উত্তল) হয় তাহলে f(x) + g(x) কঠোর অবতল (কঠোর উত্তল) হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক f(x) ও g(x) উভয়েই অবতল।

সুতরাং ; $\theta f(u) + (1-\theta) f(v) \leq f[\theta u + (1-\theta)v]$

ও $\theta g(u) + (1-\theta) g(v) \leq g[\theta u + (1-\theta)v]$ উভয়কে যোগ করলে পাওয়া যাবে ঃ

$$\theta[f(u)+g(u)] + (1-\theta)[f(v)+g(v)] \leq f[\theta u + (1-\theta)v] + g[\theta u + (1-\theta)v]$$

এটি [f(x) + g(x)] এর অবতল হওয়ার শর্ত।

এবার যদি f(x) কঠোর অবতল হয় তাহলে

$\theta f(u) + (1-\theta) f(v) < f[\theta u + (1-\theta)v]$ হবে।

$\theta g(u) + (1-\theta) g(v) < g[\theta u + (1-\theta)v]$

আবার একই পদ্ধতি অনুসরণ করে দেখা যাবে যে f(x) + g(x) কঠোর অবতল হবে। উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে একই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা হয়।

6.9 উত্তল অপেক্ষকের প্রয়োগ

গণিত এবং অর্থনীতিতে উত্তল অপেক্ষকের বহু প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। বিশেষভাবে এই অপেক্ষক প্রযুক্ত হয় অপ্টিমাইজেশন আলোচনা করার ক্ষেত্রে। (Study of optimization) যেমন কোনো একটি মুক্ত সেটের উপর সংজ্ঞায়িত কোনো উত্তল অপেক্ষকের একটির বেশী ন্যূনতম মান থাকবে না।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি থেকে বহুচলকবিশিষ্ট অপেক্ষকের উত্তলতার বা অবতলতার প্রমাণ পাওয়া যাবে।

উদাহরণ (১) একটি কবডগলাস (Cobb Douglas) অপেক্ষক $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ নেওয়া হলো যেখানে $K > 0$ ও $L > 0$। দেখাও যে এটি অবতল হবে যদি $A > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ এবং $a + b \leq 1$; এবং কঠোর অবতল হবে যদি $a > 0$, $b > 0$ ও $a + b < 1$.

সমাধান ঃ মনে রাখতে হবে যে দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষক $z = f(x, y)$ এর ক্ষেত্রে, যার অবিচ্ছিন্ন আংশিক অবকল (Continuous partial derivatives) প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমে পাওয়া যায়, এবং যে অপেক্ষকটি একটি প্লেনে একটি মুক্ত উত্তল সেটের মধ্যে সংজ্ঞায়িত হয়েছে, তার ক্ষেত্রে

(ক) f অবতল হবে $\Leftrightarrow f_{22}^{11} \leq 0\,; f_{22}^{11} \leq 0,$ ও $\begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$

(খ) f উত্তল হবে $\Leftrightarrow f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0$ ও $\begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{22} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{vmatrix} \geq 0$

এই অসমতার চিহ্ন যখন কঠোর অসমতা হবে তখন যথাক্রমে কঠোর অবতল ও কঠোর উত্তল হবে।

এই ধর্মানুসারে $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ কে পরীক্ষা করা হলো।

$$Y''_{KK} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{\beta}$$

$$Y''_{KL} = Y''_{LK} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$

$$Y''_{LL} = \beta(\beta-1)AK^{\alpha}L^{\beta-2}$$

$$H = \begin{vmatrix} Y''_{KK} & Y''_{KL} \\ Y''_{LK} & Y''_{LL} \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{\beta}\ \underset{AK^{\alpha}L^{\beta-2}}{\beta}(\beta-1).$$

$$-(\alpha\beta\, AK^{\alpha-1}, L^{\beta-1})^2$$

$$= \alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}[(\alpha-1)(\beta-1)-\alpha\beta]$$

$= \alpha\beta A^2 K^{2\alpha-2} L^{2\beta-2}[1-(\alpha+\beta)]$ ....(1)

যদি $A > 0$, $a' > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ হয় তবে $H \geq 0$; এবং α, $\beta > 0$ ও $\alpha + \beta < 1$ হলে $H > 0$ সেই সঙ্গে Y''_{KK} ও Y''_{LL} হবে ≤ 0 বা < 0।

(২) একজন একচেটিয়া কারবারী নিম্ন উদ্ধৃত চাহিদা অপেক্ষকের সম্মুখীন হয় ঃ

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2$$

অর্থাৎ $-2P_1 + P_2 = Q_1 - 40$

এবং $P_1 - P_2 = Q_2 - 15$

ক্রেমার নিয়মে, Q_1 ও Q_2 কে যদি প্যারামিটার ধরে P_1 ও P_2 কে বার করা যায়, তা হবে

$$P_1 = 55 - Q_1 - Q_2 \quad = AR_1$$

$$P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2 = AR_2$$

মোট আয় $R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (55 - Q_1 - Q_2)\, Q1 + (70 - Q_1 - 2Q_2)Q_2$

$$= 55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_1Q_2 - Q_1{}^2 - 2Q_2{}^2$$

সুতরাং লাভ $= \pi = R - C$

$$= 55Q_1 + 70Q_2 - 3Q_1Q_2 - 2Q_1{}^2 - 3Q_2{}^2$$

(যেখানে $C = Q_1{}^2 + Q_1Q_2 + Q_2{}^2$)

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1} = \pi_1 = 55 - 3Q_2 - 4Q_1$$

$\pi_{11} = -4 < 0$ $\quad \dfrac{\partial\pi}{\partial Q_2} = \pi_2 = 70 - 3Q_1 - 6Q_2$

$\pi_{22} = -6 < 0$ $\quad \pi_{12} = \pi_{21} = -3$ হেসিয়ান কে H দিয়ে প্রকাশ করলে

$$H = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

সুতরাং মুনাফা অপেক্ষকটি কঠোর অবতল।

উদাহরণ (৩) দেখাও যে (ক) $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ $(a, b, c \geq 0)$ একটি উত্তল অপেক্ষক (খ) $g(x, y, z) = e^{ax^2+by^2+cz^2}$ $(a, b, c \geq 0)$ একটি উত্তল অপেক্ষক।

সমাধান ঃ (ক) যেহেতু f হলো পৃথকভাবে তিনটে উত্তল অপেক্ষকের যোগফল সুতরাং f হলো উত্তল।

(খ) $g(x, y, z) = e^u$ যেখানে $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ এখানে $u \to e^u$ এই রূপান্তরটি

(transformation) এ u হলো উত্তল। যদি f(x) উত্তল ও F(u) উত্তল এবং বর্ধমান হয় তবে v(x) = F(f(x)) ও উত্তল হবে। উত্তলতর এই ধর্মানুসারে g উত্তল হবে।

6.10 সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন

অর্থনীতিতে সীমাহীন অপ্টিমাইজেশনের ধারণা খুবই মৌলিক। যেমন চাহিদা তত্ত্বে আলোচিত হয় কিভাবে ভোক্তা তার ক্রয়ক্ষমতা দ্বারা সমর্থিত দ্রব্যগুচ্ছের মধ্যে তার সবচেয়ে পছন্দের দ্রব্যসংমিশ্রণ পছন্দ করতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ অপ্টিমাইজেশন বা স্থানীয় প্রান্তিকমান বলতে বোঝায় কিছু প্রদত্ত সেটের মধ্যে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষককে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন করা। সীমাহীনভাবে এই সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ বলতে বোঝায় যে যদি অপেক্ষকগুলি দুবার অবিচ্ছিন্নভাবে অবকলনযোগ্য হয় তবে $\hbar^n$ এর মধ্যে যে কোনো বিন্দুই সম্ভাব্য সমাধান যোগ হবে (By unconstrained optimisation problem it means that for functions which one twice continuously differentiable, any point in $\hbar^n$ is allowed to be a possible solution)

6.10.1 অপ্টিমাইজেশনের শর্ত ঃ

বহুচলক অপেক্ষক Z = f(x, y) আপাত সর্বনিম্নতা বা সর্বাধিক মানে পৌঁছাবে নিম্নপ্রদত্ত শর্তগুলি সাধিত হলে ঃ

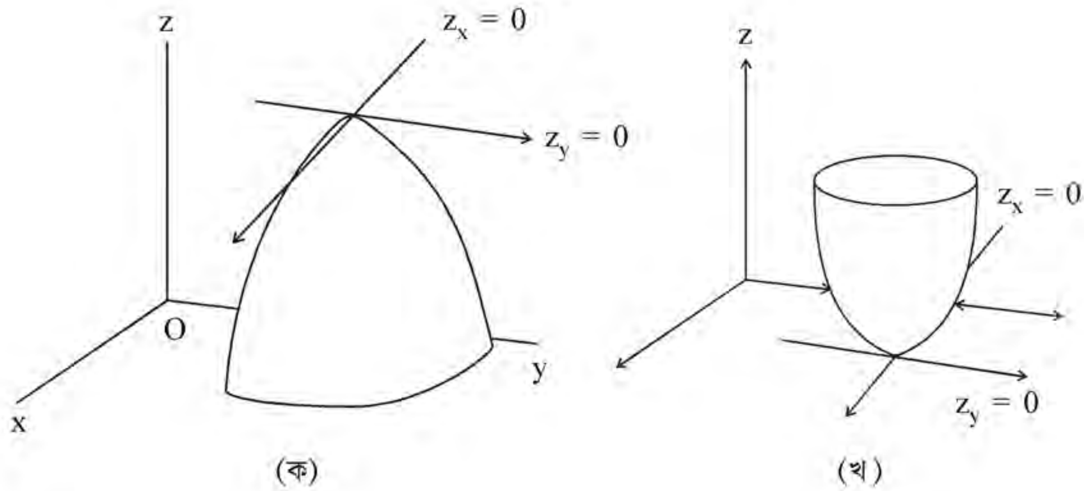
(i) প্রথম ক্রমের (first order) আংশিক অবকলগুলি একত্রে শূন্য হতে হবে। এর অর্থ হলো কোনো প্রদত্ত বিন্দু যাকে সংকট বিন্দু (critical point) বলা হয়, সেই বিন্দুতে অপেক্ষকটি তার মুখ্য অক্ষের সাপক্ষে বাড়বেও না এবং কমবেও না। কিন্তু একটি আপাত মালভূমিতে থাকবে। (but it at its relative plateau)

(ii) দ্বিতীয় ক্রমের প্রত্যক্ষ আংশিক অবকলগুলির (second order direct partial derivatives) যখন সংকট বিন্দু (a, b) তে মান নির্ণয় করা হয়, সেই মান অবশ্যই ঋণাত্মক হবে যদি অপেক্ষকটি আপাত সর্বোচ্চ স্থানে পৌঁছায় ও ধনাত্মক হবে যদি আপাত নিম্নতম স্থানে পৌঁছায়। এর অর্থ হলো যে ওই আপাত মালভূমি, (a, b) বিন্দু থেকে অপেক্ষকটি অবতল হয়ে মুখ্য অক্ষদুটির সাপেক্ষে নিম্নভিমুখী হয় যদি অপেক্ষক সর্বাধিক (maximum) বা চরম হয় এবং উত্তল হয়ে উর্ধ্বগামী হবে, সংকট বিন্দুতে যদি অপেক্ষকটি অবম বা সর্বনিম্ন হয়।

(iii) দ্বিতীয় ক্রমের প্রত্যক্ষ আংশিক অবকলদ্বয়ের গুণফল যখন সংকট বিন্দুতে নেওয়া হয়, তখন তার মান, বিপরীত আংশিক অবকলদ্বয়ের (cross partial derivatives) গুণফল অপেক্ষা অধিক হয়। এক্ষেত্রেও মানগুলি সংকট বিন্দুতেই নেওয়া হবে।

নীচের ছবিগুলির মাধ্যমে বিশদভাবে ধারণাটি বোঝা যাবে।

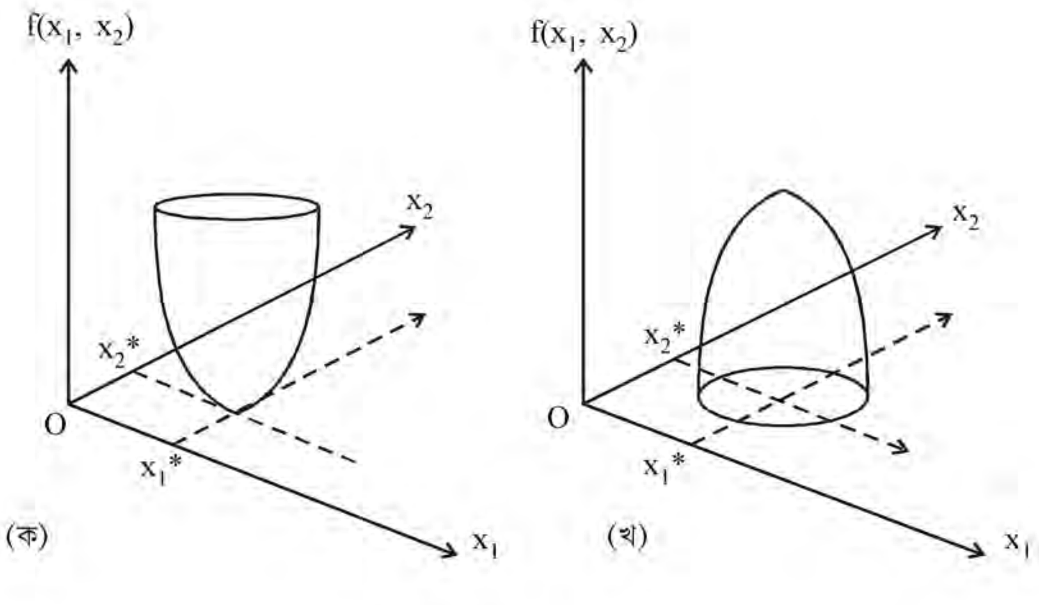
চিত্র ৬

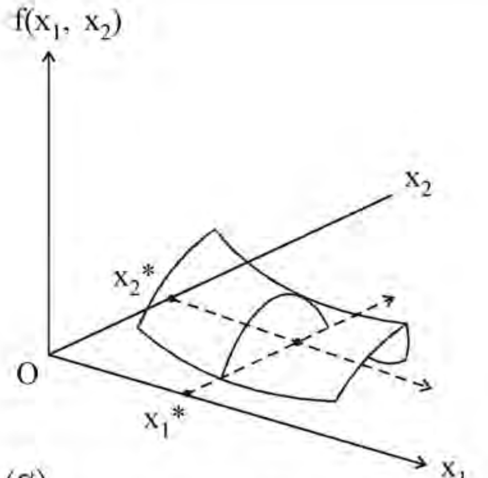


চিত্র ৬ কে তে অপেক্ষকটি কঠোর অবতল, x এবং y এর সাপেক্ষে। সেখানে কেবলমাত্র একটিই চরম মান আছে যাকে বলা যাবে সার্বিক চরম মান (Global maxima) আবার চিত্র ৬(খ) কঠোর উত্তল অপেক্ষক আঁকা হয়েছে যার কেবলমাত্র একটিই অবম মান আছে। সুতরাং এক্ষেত্রে সংকট বিন্দু সার্বিক অবম মান নির্দেশ করবে। যদি অপেক্ষক অবতল (উত্তল) হয় x ও y এর সাপেক্ষে, কোনো নির্দিষ্ট পরিসরে, তাহলে উক্ত সংকট বিন্দু স্থানীয় চরম (অবম) মান নির্দেশ করবে।

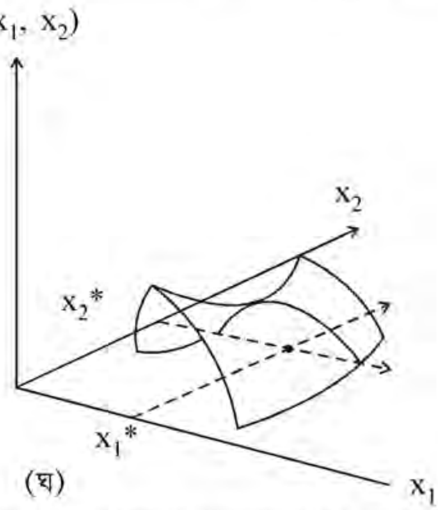
এবার চিত্র ৭ লক্ষ করা যাক্।

চিত্র (৭)





(গ)



(ঘ)

চিত্র ৭(ক) তে অপেক্ষকটি x_1 বরাবর (direction) অবম ও x_2 বরাবর অবম মানগ্রহণ করছে। চিত্র ৭(খ) তে x_1 ও x_2 উভয়দিকে অপেক্ষকটি চরম। চিত্র ৭(গ) তে অপেক্ষক x_1 বরাবর অবম ও x_2 বরাবর অবম ও x_2 বরাবর চরম এবং চিত্র ৭(ঘ) তে x_1 বরাবর চরম ও x_2 বরাবর অবম হয়েছে স্থিতিশীল বিন্দুতে (stationary valuesof $f(x_1, x_2)$)। এই ৭(গ) ও ৭(ঘ) চিত্রতে অপেক্ষকটি স্থিতিশীল বিন্দুর সাপেক্ষে "জিন বিন্দু" বা saddle point বলা হয়।

সুতরাং চরম মানের গাণিতিক শর্তানুসারে

1. fx, fy = 0
2. fxx, fyy < 0
3. fxx, fyy > $(f_{xy})^2$ বা fxx.fyy – $(fxy)^2$ > 0

অবম মানে যখন z = f(x, y) পৌঁছবে তার গাণিতিক শর্ত ঃ

1. fx, fy = 0
2. fxx, fyy > 0
3. fxx.fyy > $(f^{xy})^2$ বা fxx.fyy – $(f_{xy})^2$ > 0

z = f(x, y) সংকট বিন্দু যখন ভাঁজ বিন্দু বা ভাঁজ বিন্দু হবে (inflexion point) তার গাণিতিক শর্ত

1. fxx, fyy একই চিহ্ন
2. fxx.fyy < (fxy)2 বা fxx.fyy – (fxy)2 < 0 এবং অপেক্ষকটি জিন বিন্দুতে থাকবে (the function is at a saddle point) তার শর্ত ঃ

1. fxx ও fyy পরস্পর বিরোধী চিহ্ন
2. fxx.fyy < $(fxy)^2$ বা fxx.fyy – $(fxy)^2$ < 0

উদাহরণ ঃ (১) নীচের অপেক্ষকদ্বয়ের ক্ষেত্রে (i) তাদের কোন সংকট মানে অপেক্ষকদ্বয় স্থানীয় প্রান্তিক মানে পৌঁছেছে (optimized) নির্ণয় কর। (ii) সেই সংকট মানে (critical values) অপেক্ষকে

দুটি কি চরম, অবম, ভাঁজ বিন্দু বা জিন বিন্দুতে পৌঁছেছে তা নির্ণয় করো।

(i) $f(x, y) = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$

(ii) $z(x, y) = 3x^2 - 5y^2 - 225x + 70y + 23.$

সমাধান ঃ (i) $f(x, y) = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$

$Z_x = -6x - 6y + 72 = 0$ $\quad Z_y = -6x - 4y + 48 = 0$

$x = 0, y = 12$ অর্থাৎ সংকট বিন্দু (0, 12)

$Z_{xx} = -6, \quad Z_{yy} = -4$

$Z_{xx}(0, 12) = -6 < 0 \quad Z_{yy}(0, 12) = -4 < 0$

সুতরাং অপেক্ষকটির Zxx ও Zyy এই দুই দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলন মান একই চিহ্নযুক্ত।

$Z_{xy} = -6 = Z_{yx}$ $\quad Z_{xy}(0, 12) = -6 = Z_{yx}(0, 12)$

কিন্তু $Z_{xx}(0, 12) . Z_{yy}(0, 12) = -6x - 4 = 24$

এবং $[Z_{xy}(0, 12)]^2 = (-6)^2 = 36.$

$24 < 36$ বা $Z_{xx} . Z_{yy} < (Z_{xy})^2$

অর্থাৎ Z_{xx}, Z_{yy} একই চিহ্ন যুক্ত হলেও $Z_{xx}.Z_{yy} < (Z_{xy})^2$ হওয়াতে অপেক্ষকটি (0, 12) বিন্দু (সংকট বিন্দু) ভাঁজবিন্দু হয়েছে (inflection point)।

(ii) $Z(x, y) = 3x^2 - 5y^2 - 225x + 70y = 23$

$Zx = 9x^2 - 225 = 0$ $\quad Zy = -10y + 70 = 0$

$9x^2 - 225$ $\quad 10y = 70$

$x = 5$ $\quad \Rightarrow y = 7$

$\therefore (x^2 = 25)$

$\therefore$ সংকট বিন্দুগুলি (5, 7) ও (–5, 7)

$Z_{xx} = 18x$ $\quad Z_{yy} = -10$

$Z_{xx}|_{(5,7)} = 18 \times 5 = 90 < 0$ $\quad Z_{yy}|_{(5,7)} = -10 < 0$

$Z_{xx}|_{(-5,7)} = -90 < 0$ $\quad Z_{yy}|_{(-5,7)} = -10 < 0$

বিপরীত আংশিক অবকলন মান $Zxy = Zyx = 0$

এখন (5, 7) সংকট বিন্দুতে ঃ

$$Z_{xx}.Z_{yy} = 90 \times -10 = -900$$

$\therefore (Z_{xx}.Z_{yy}) < (Z_{xy})^2$ এবং Zxx ও Zyy এই (5, 7) সংকট বিন্দুতে পরস্পর বিরোধী চিহ্ন নির্দেশ করে। সুতরাং Z (5, 7) হলো জিন বিন্দু (Saddle point)

আবার (–5, 7) সংকট বিন্দুতে

$Z_{xx} \, . \, Z_{yy} = 900$

$Z_{xx} \, . \, Z_{yy} > (Z_{xy})^2$ ও Z_{yy} উভয়েই ঋণাত্মক। সুতরাং $Z(-5, 7)$ এ আপাত চরম মান নির্দেশ করবে।

উদাহরণ (২) যদি $f(x, y) = ax^2y + bxy + xxy^2 + c$ হয় তবে a, b, c এই তিনটি ধ্রুবকের কোন মানের জন্য অপেক্ষকটি (2/3, 1/3) বিন্দুতে স্থানীয় অবম মানে পৌঁছাবে যেখানে তার স্থানীয় সর্বনিম্ন মান হবে –1/9 ?

$f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$

প্রাথমিক শর্ত (first order condition) ঃ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2axy + by + 2y^2 = 0 \Rightarrow y(2ax + b + 2y) = 0$$

$\therefore \; 2ax + b + 2y = 0$ হবে যদি $y = 0$ হয়। .....(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x2 + bx + 4xy = 0 \Rightarrow x(ax + b + 4y) = 0$$

$\Rightarrow ax + b + 4y = 0$ হবে যদি $x \neq 0$ হয়। .....(2)

(i) ও (ii) পারস্পরিক সমাধান করে পাওয়া যায়

$$x = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3} \qquad y = -\frac{b}{6} = \frac{1}{3} \quad \therefore \; a = 1 \text{ ও } b = -2$$

যেহেতু f(x, y) এর স্থানীয় অবম মান হলো $-\frac{1}{9}$

$$\therefore f(x,y) = 1.\frac{4}{9}.\frac{1}{3} + (-2).\frac{2}{3}.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3}.\frac{1}{9} + C = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{27} - \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + C = -\frac{1}{9}$$

সুতরাং $C = -\frac{1}{9}$

$\therefore \; a = 1, \; b = -2, \; c = -\frac{1}{9}$ হলো ধ্রুবকত্রয়ের মান।

যদি এবার n সংখ্যক পছন্দ চলক (n choice variables) নেওয়া যায় এবং উদ্দেশ্য অপেক্ষক (objective function) হয় $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ তাহলে নির্ণায়ক ভিত্তিক আপাত স্থানীয় প্রান্তিক মানকে (Relative optimum) নিম্নলিখিত সারণী মাধ্যমে প্রকাশ করা যাবে।

সারণী ১ ঃ আপাত স্থানীয় প্রান্তিক মানের নির্ণায়কভিত্তিক পরীক্ষা ঃ $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

শর্ত	সর্বোচ্চ	সর্বনিম্ন
প্রথম বর্গের আবশ্যিক শর্ত	$f_1 = f_2 = ... = f_n$	$f_1 = f_2 = ... = f_n$
দ্বিতীয় বর্গের আবশ্যিক শর্ত	$(-1)^i \|Hi\| > 0 \ \forall i = 1, ..., n$	$\|Hi\| > 0 \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$

যেখানে $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & ...... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ...... & f_{2n} \\ f_{n_1} & f_{n_2} & ...... & f_{n_n} \end{bmatrix}$ যার মুখ্য মাইনর

$$|H_1| = f_{11}, \ |H_2| = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad ...., \quad |H_n| = |H|$$

এই আলোচনার ক্ষেত্রে বিশেষভাবে মনে রাখা আবশ্যক যে যখন $z = f(x, y)$ অপেক্ষকের স্থানীয় প্রান্তিক মান নির্ণয় করা হচ্ছে ঃ তখন প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত যা পূরণ না হলে চরম বা অবম মান প্রাপ্ত হবে না তা হলো $dz = 0$; dx ও dy এর যে কোনো মানের (arbitrary) মানের জন্য যেখানে উভয়েই একসাথে শূন্য হবে না।

$$dz = fx^{dx} + fy^{dy}.$$

দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত বা যথেষ্ট শর্ত হলো z এর চরম মানের জন্য $d^2z \leq 0$ এবং z এর অবম মানের জন্য $d^2z \leq 0$; dx ও dy এর যে কোনো মানের সাপেক্ষে, যেখানে দুটি একসাথে শূন্য হবে না।

এখন $d^2z \quad < 0$ যদি $fxx < 0, fyy < 0$; $fxx \ fyy > f^2xy$

> 0 যদি $fxx > 0 \ fyy > 0$; $fxx \ fyy > f^2xy$

উদাহরণ (১) কোনো একটি পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক ফার্মের মুনাফা অপেক্ষক হলো $\pi = R - C$ ধরা যাক উৎপাদন অপেক্ষক কব ডগলাস আকারের, দ্রব্যের দাম, মজুরীর হার ও মূলধনের দাম যথাক্রমে p, w ও r। ধরা যাক উৎপাদন অপেক্ষকটিতে $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ এবং $\alpha + \beta < 1$ এক্ষেত্রে কি পরিমাণ উৎপাদনে, শ্রমিক ও মূলধনের পরিমাণে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\quad Q = Q(K, L) = L^\alpha K^\beta = L^\alpha K^\alpha \quad (\because \ \alpha = \beta)$

$$\pi = R - C = PQ - wL - rK. = PL^\alpha K^\alpha - wL - rK.$$

মুনাফা সর্বোচ্চকরণের প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্তানুসারে $\dfrac{\partial \pi}{\partial L} = \dfrac{\partial \pi}{\partial K} = 0$

$$\therefore \ \frac{\partial \pi}{\partial L} = P\alpha L^{\alpha-1}K^{\alpha} - w = 0 \qquad .....(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = P\alpha L^{\alpha}K^{\alpha-1} - r = 0 \qquad .....(2)$$

(1) ও (2) থেকে স্থানীয় প্রান্তিক K ও L নির্ণীত হবে কিন্তু দ্বিতীয় তার চরম না অবম জানার জন্য দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত পূরণ হওয়া আবশ্যক।

$$|H| = \begin{vmatrix} \pi_{LL} & \pi_{LK} \\ \pi_{KL} & \pi_{KK} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\alpha} & P\alpha^2L^{\alpha-1}K^{\alpha-1} \\ P\alpha^2L^{\alpha-1}K^{\alpha-1} & P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha}K^{\alpha-2} \end{vmatrix}$$

চরম মানের যথেষ্ট শর্তানুসারে $|H_1| < 0$ ও $|H| > 0$

$$|H_1| = P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\alpha} < 0 \qquad \left(\because \ \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

$$|H| = P^2\alpha^2(\alpha-1)^2L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2} - P^2\alpha^4L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2}$$

$$= P^2\alpha^2L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2}(1-2\alpha) > 0 \qquad \left(\because \ \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

দ্বিতীয় যথেষ্ট শর্ত পূরণ হলো।

(1) থেকে ঃ $P\alpha L^{\alpha-1}K^{\alpha} = W$

$$\therefore \ K = \left(\frac{W}{P\alpha}L^{1-\alpha}\right)^{Y_{\alpha}}$$

(2) এ প্রতিস্থাপন করে পাওয়া যাবে ঃ

$$P\alpha L^{\alpha}K^{\alpha-1} - r = P\alpha L^{\alpha}\left[\left(\frac{w}{P\alpha}L^{1-\alpha}\right)^{y_{\alpha}}\right]^{\alpha-1} - r = 0$$

$$\Rightarrow P^{Y\alpha}\alpha^{Y\alpha}W^{(\alpha-1)/\alpha}L^{(2\alpha-1)/\alpha} = r$$

$$\therefore \ L^* = \left(P\alpha W^{\alpha-1}R^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

$$K^* = \left(P\alpha\, r^{\alpha-1}\, w^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

$$Q^* = \left(L^*\right)^{\alpha}\left(K^*\right)^{\alpha} = \left(P\alpha W^{\alpha-1}r^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}\left(P\alpha R^{\alpha-1}W^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

$$= \left(\frac{\alpha^2 p^2}{wr} \right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

সুতরাং মুনাফা সর্বোচ্চকারী উৎপাদনকে p, w, r এই বর্হিমুখী চলকের (exogeneous variables) অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

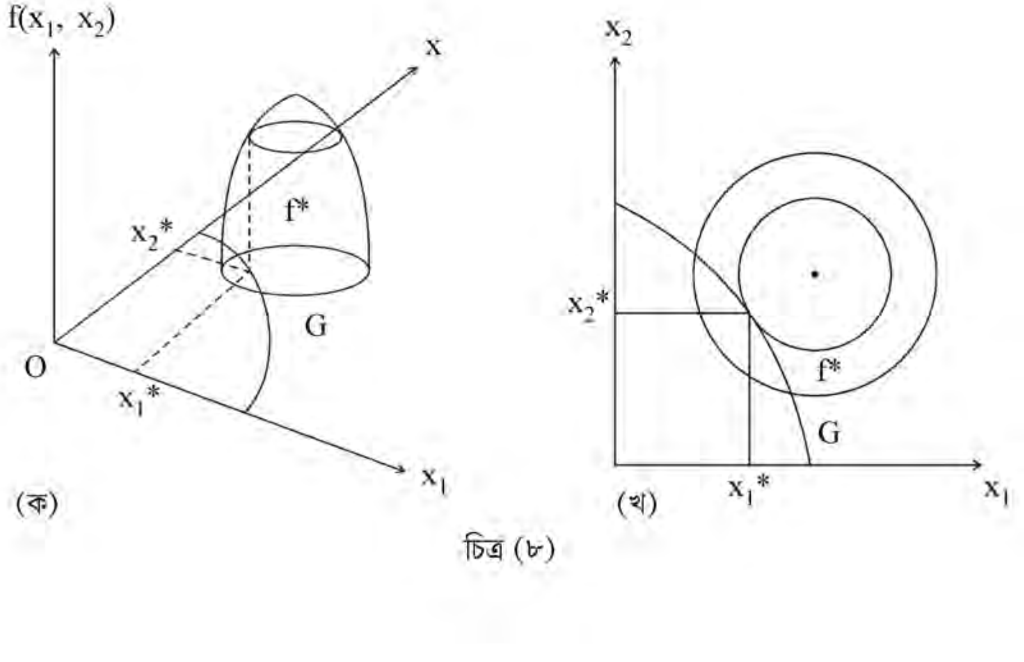
L* ও K* হলো শ্রমিক ও মূলধনের পরিমাণ যা মুনাফা সর্বোচ্চ করে।

সীমাবদ্ধ স্থানীয় প্রান্তিক মান বা অপ্টিমাইজেশন (Constrained optimization) :

যখন কোনো অপেক্ষককে চরম বা অবম মানে পৌঁছাতে গেলে বাস্তব রেখার উপর অবস্থিত x চলকের যে কোনো মানই অবাধে সম্ভাব্য সমাধান হিসাবে গ্রহণ করা হয়, নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে তখন সেটি সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন পদ্ধতির মধ্যে পড়ে। কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই, বিশেষতঃ অর্থনৈতিক সমস্যার ক্ষেত্রে এক বা একাধিক সীমা বা বাধা x চলকের যে কোনো মান, চরম বা অবম হতে নিয়ন্ত্রণ করে বা বাধা দেয়। সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন এরই অন্তর্গত।

6.11 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন সমস্যার বিশদ ব্যাখ্যা

ধরা যাক $f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকটি যেখানে $f \in \hbar^2$ একটি কঠোর অবতল অপেক্ষক এবং বাধা হলো (constraint) $g(x_1, x_2) = 0$ যেখানে $g \in \hbar^2$ অর্থাৎ f কে যদি চরম মানে নেওয়া যায় তাহলে সমাধান হিসাবে সেই (x_1, x_2) কেই গণ্য করা হবে, যা $g(x_1, x_2) = 0$ এই বাধা সমীকরণটিকে রক্ষা করে। চিত্র ৮ এর (ক) তে উদ্দেশ্য অপেক্ষক f কে তিনটি পৃষ্ঠতলে (Three dimensions) এবং f (খ) চিত্রে f এর সংলগ্ন (associated) লেভেল রেখা (level curve) অঙ্কক করা হয়েছে।



চিত্র (৮)

উপরিউক্ত চিত্রটিতে দেখানো হয়েছে কিভাবে বাধা রেখার উপরিস্থিত বিন্দু f এর সর্বোচ্চ মান দিতে পারে। G রেখা (x1, x2) জোড়ার সেট বোঝায় যা বাধা সমীকরণটি দ্বারা নির্দেশিত। f(খ) চিত্র থেকে বোঝা যায় যে f* হলো সর্বোচ্চ লেভেল রেখা যা G এর সাপেক্ষে বা G এর উপর থেকে চরম মান গ্রহণ করেছে যেখানে সর্বাধিক (x_1, x_2) হলো (x_1*, x_2*) বা (x_1*, x_2*) বিন্দু উদ্দেশ্য অপেক্ষকের, বাধা সমীকরণের ভিত্তিতে সর্বাধিক মান প্রদান করে। (x_1*, x_2*) বিন্দুতে বাধা অপেক্ষক ও উদ্দেশ্য অপেক্ষক পরস্পর স্পর্শক হয়। এখন যদি এই চিত্র অনুযায়ী সমাধানটিকে বীজগাণিতিয় পদ্ধতিতে দেখানো যায় তাহলে নিম্নের উপায় অবলম্বন করা হবে।

$y = f(x_1, x_2)$ র লেভেল রেখা হবে ঃ

$\bar{y} = f(x_1, x_2) \Rightarrow f(x_1, x_2) - \bar{y} = 0$

ইমপ্লিসিট অপেক্ষক উপপাদ্য (Implicit function theorem) অনুসারে $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - y = 0$

$\therefore\ dF = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0$ যেহেতু y হলো স্থির রাশি।

$$\therefore\ \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\bar{y}} \text{ or } \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dy=0} = -\frac{f_1}{f_2} \text{ or } \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

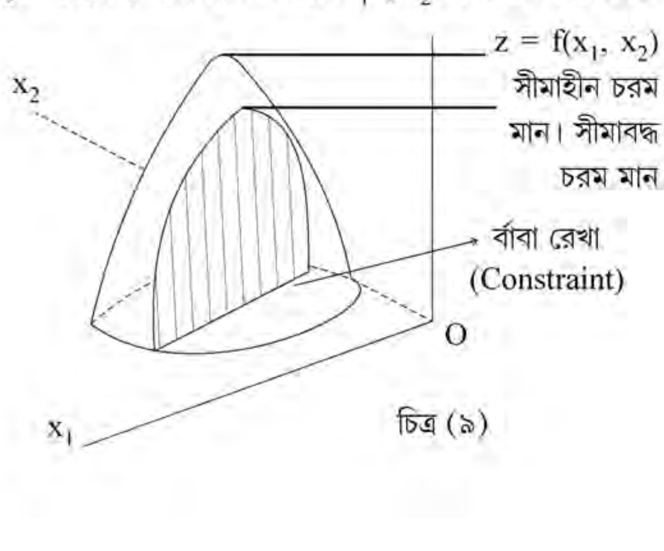
G এর ঢাল হলো $\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right| = \frac{g_1(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)}$

যে বিন্দুতে এই দুই অপেক্ষক স্পর্শক হয়েছে সেখানে এদের ঢাল সমান। এই বিন্দু (x_1*, x_2*) হলে

$$\therefore\ \frac{f_1(x_1*, x_2*)}{f_2(x_1*, x_2*)} = \frac{g_1(x_1*, x_2*)}{g_2(x_1*, x_2*)}$$

কিন্তু লক্ষণীয় যে এই একটি সমীকরণ থেকে x_1*, x_2* এই দুই অজানা রাশির মান নির্ণীত হবে না; তাই দ্বিতীয় সমীকরণ হিসাবে $g(x_1*, x_2*) = 0$ কে নেওয়া হয়। এভাবে x_1*, x_2* ও f এর মান নির্ণয় করা হয়।

অর্থাৎ $z = f(x_1, x_2)$ এই অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন ও সীমাহীন অপ্টিমাইজেশনকে নিম্নলিখিত চিত্রে আরও সুস্পষ্টভাবে ব্যাখ্যা করা যায়।



চিত্র (৯)

চিত্রে সীমাহীন চরম মান হলো সম্পূর্ণ গম্বুজের চূড়াতে (peak point) কিন্তু সীমাবদ্ধ

চরম মান হলো বাধারেখার (constraint line) উপরে যে উল্টো U আকৃতির বক্ররেখা (curve) তার সর্বোচ্চ বিন্দুতে। অর্থাৎ সীমাবদ্ধ চরম মান, স্বাধীন চরম মান অপেক্ষা অধিক হবে না।

ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতি অনুসারে সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন সমস্যার মান নির্ণয় (Lagrange Multiplier Method) :

ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতির অনুসরণে 2 = f(x, y) অপেক্ষকের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা যায় যেখানে x ও y একটি সমতাযুক্ত বাধা সমীকরণ (equality constrants), g(x, y) = c কে পূরণ করে।

ল্যাগ্রাঞ্জ কে লেখা হয় ঃ

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c]$$

এখানে λ একটি ধ্রুবক। L কে x, ও y ও এর সাপেক্ষে আংশিক অবকলন করে প্রথম ক্রমের জরুরী শর্তানুসারে তাকে শূন্যর সমান করা হয়। অর্থাৎ

$$Lx(x, y) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \qquad .....(1)$$

$$Ly(x, y) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \qquad .....(2)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) - c = 0$$

উপরিউক্ত তিনটি সমীকরণ পরস্পর সমাধান করলে x, y ও λ র মান পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত (Second Order Condition) :

এখানেও দ্বিতীয় ক্রমের জরুরী (necessary) ও যথেষ্ট শর্ত নির্ভর করবে দ্বিতীয় ক্রমের পূর্ণ অবকলন d^2z এর উপর যাকে স্থিতিশীল (stationary) বিন্দুতে (প্রথম ক্রম থেকে প্রাপ্ত x ও y বিন্দু) মান নির্ণয় করা হচ্ছে, তার উপর। এখানে d^2z এর নির্দিষ্ট বা আধানির্দিষ্ট (definite of semi definition) চিহ্ন, বিবেচিত হবে কেবলমাত্র সেই dx ও dy এর মানের উপর যা dg = gxdx + gydy = 0 এই রৈখিক বাধাকে পূরণ করবে।

দ্বিতীয় ক্রমের আবশ্যিক বা জরুরী শর্ত ঃ

(i) Z চরম হবে যখন d^2z ঋণাত্মক আধানির্দিষ্ট (negative semidefinite), dg = 0 র সাপেক্ষে।

(ii) Z অবম হবে যখন d^2z ধনাত্মক আধানির্দিষ্ট, dg = 0 র সাপেক্ষে।

দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত ঃ

(i) Z চরম হবে যখন d^2z ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে dg = 0 র সাপেক্ষে।

(ii) Z অবম হবে যখন d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে dg = 0 র সাপেক্ষে।

বর্তমান আলোচনার ক্ষেত্রে কেবলমাত্র দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্তটি বিশদভাবে বোঝানো হলো।

পূর্বে আলোচিত ল্যাগ্রাঞ্জ পদ্ধতির জরুরী শর্তানুসারে $\frac{fx}{fy} = \frac{gx}{gy}$ (1 ও 2 নং সমীকরণ থেকে)

আবার (1) ও (2) নং সমীকরণ থেকে

$$\frac{fx}{fy} = \lambda \text{ or } \frac{fy}{gy} = \lambda$$

অর্থাৎ বাধার যদি সরণ হয় তবে L* ও Z* কিভাবে সাড়া দেবে তার পরিমাপ পাওয়া যায় λ থেকে।

এখন $d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[f_x dx + f_y dy]dx + \frac{\partial}{\partial y}[f_x dx + f_y dy]dy$$

$$= \left[f_{xx}dx + (f_{xy}dy + fy\frac{\partial dy}{dx}\right]dx + \left[f_{yx}dx + (f_{yy}dy + fy\frac{\partial}{\partial y}^{dy}\right]dy$$

$$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + fy\frac{\partial}{\partial x}^{(dy)}dx + fy_x dxdy + f_{yy}dy^2 + fy\frac{\partial}{\partial y}(dy) + dy.$$

এখন $f_y\left[\frac{\partial}{\partial x}(dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dy)dy\right] = f_y d(dy) = f_y d^2y$

$$\therefore\ d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 + f_y d^2y \qquad .....(3)$$

বাধা সমীকরণ $g(x, y) = c \quad \therefore\ dg = 0$ এবং $d(dg) = 0$

$$\Rightarrow d^2g = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2 + g_y d^2y = 0$$

এই সমীকরণ থেকে d^2y এর মান নির্ণয় করে যদি (3) নং সমীকরণে বসাই তাহলে d^2z হবে

আবশ্যিক শর্তের $L_x(x, y)$ ও $L_y(x, y)$ কে পুনরায় আংশিক অবকলন যদি করা যায় তাহলে হবে ঃ

$$L_{xx} = f_{xx} - \lambda g_{xx}$$

$$L_{yy} = f_{yy} - \lambda g_{yy}$$

$$L_{xy} = f_{xy} - \lambda g_{xy} = L_{yx}.$$

$$\therefore\ d^2z = L_{xx}dx^2 + L_{xy}dxdy + L_{yx}dydx + L_{yy}dy^2$$

এই দ্বিতীয় ক্রমের প্রাপ্ত যথেষ্ট শর্তকে নির্ণায়কের মাধ্যমে যখন প্রকাশ করা হবে তখন তাকে বলা হবে বর্ডারকৃত হেসিয়ান (Bordered Hessian)। এই নির্ণায়কের গঠন পদ্ধতি নিম্নে আলোচনা করা হলো।

কোনো একটি রৈখিক বাধা র সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ

এর নির্দিষ্টতার চিহ্নর শর্ত আগে দেখা যাক (sign definiteness)

$\alpha u+\beta v=0$ হলে

$\alpha u=-\beta v$ ও $v=-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)u.$

$$\therefore\ q=au^2-2h\frac{\alpha}{\beta}u^2+b\frac{\alpha^2}{\beta^2}u^2\ =(\alpha\beta^2-2h\alpha\beta+b\alpha^2)\frac{u^2}{\beta^2}$$

q ধনাত্মক (ঋণাত্মক) নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি বন্ধনীর মধ্যের পদ (expression) ধনাত্মক (ঋণাত্মক) হয়।

এবার $2h\alpha\beta-\alpha\beta^2-b\alpha^2=\begin{vmatrix}0&\alpha&\beta\\\alpha&a&h\\\beta&h&b\end{vmatrix}$ হবে। এই পদটি বন্ধনীস্থিত পদের বিপরীত।

সুতরাং বলা যায় ঃ

(1) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে $\alpha u + \beta v = 0$ র সাপেক্ষে কেবলমাত্র যদি $\begin{vmatrix}0&\alpha&\beta\\\alpha&a&h\\\beta&h&b\end{vmatrix}<0$ হয়।

(2) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে $\alpha u + \beta v = 0$ র সাপেক্ষে কেবলমাত্র যদি $\begin{vmatrix}0&\alpha&\beta\\\alpha&a&h\\\beta&h&b\end{vmatrix}>0$ হয়।

লক্ষণীয় এই যে উল্লিখিত নির্ণায়কটি মূল দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $\begin{vmatrix}a&h\\h&b\end{vmatrix}$ যার উপরে এবং বাঁদিকে একই আকারের বর্ডার করা আছে। যেখানে মুখ্য কর্ণে শূন্য ও বাকি রাশি হলো বাধা সমীকরণের সহগ α ও β।

এবার এই পদ্ধতিটিই যদি d^2z এ প্রযুক্ত হয়, তখন $u = dx$ ও $v = dy$ এবং নিরূপক হবে $\begin{vmatrix}L_{xx}&L_{xy}\\L_{yx}&L_{yy}\end{vmatrix}$। আবার $g_x = \alpha$ ও $\beta = g_y$ হবে $g_xdx + g_ydy = 0$ থেকে।

সুতরাং বলা যায় ঃ

(i) d^2z ; ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে $dg = 0$ র সাপেক্ষে যদি $|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yz} & L_{yy} \end{vmatrix} < 0$ হয়।

(ii) d^2z ; ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে $dg = 0$ র সাপেক্ষে যদি $|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} > 0$ হয়।

$|\bar{H}|$ হলো বর্ডারযুক্ত হেসিয়ান নিরূপক।

অতএব $Z = f(x, y)$ এই উদ্দেশ্যে অপেক্ষকের বাধা সমীকরণের সাপেক্ষে প্রদত্ত স্থিতিশীল মান আপাত চরম হবে যখন $|\bar{H}|$ ধনাত্মক হবে ও অবম হবে যদি $|\bar{H}|$ ঋণাত্মক হয়। মনে রাখা আবশ্যক সমস্ত অবকলনগুলি, যেগুলি $|\bar{H}|$ এ ব্যবহার করা হয়েছে তা x, y এর সংকট মানের ভিত্তিতে গৃহীত হয়েছে।

বহুচলক বিশিষ্ট রাশির ক্ষেত্রে এই নির্ণায়ক ভিত্তিক অপ্টিমাইশেন পরীক্ষার জন্য নিচের সারণীটি দেওয়া হলে; সেক্ষেত্রে উদ্দেশ্য অপেক্ষক হলো $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ও বাধা সমীকরণ হলো $g(x_1, x_2, ..., x_n) = C$ এবং $L = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, ..., x_n)]$ হলো ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক।

শর্ত	সর্বোচ্চ মান	সর্বনিম্ন মান
প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত	$L_1 = L_2 = ... = L_n = 0$	$L_1 = L_2 = ... = L_n = 0$
দ্বিতীয় ক্রমের আবশ্যিক শর্ত	$|\bar{H}_2| > 0 |\bar{H}_3| < 0$ $|\bar{H}_4| > 0 ..... (-1)^n |\bar{H}_n| > 0$	$|\bar{H}|, |\bar{H}_3|,$ $....., |H_n| y0$

উদাহরণ (১) নিম্নলিখিত উপযোগ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো ঃ

$U = U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ (x, y > 0 ; α ; β > 0)

উপযোগ অপেক্ষকটির আবশ্যিক শর্ত সাপেক্ষে (প্রথম ক্রমের) x ও y এর সাম্যাবস্থার মান x*, y* নির্ণয় করো। এক্ষেত্রে বাজেট রেখা হলো M = pxx + pyy.

সমাধান ঃ ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক ঃ $L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda[M = x\,Px - y\,Py]\,\lambda > 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda P_x = 0 \qquad ....(i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0 \qquad ....(ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_{\lambda} = M - p_x x - P_y y = 0 \qquad .....(iii)$$

(1) (ii), (iii) হলো প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত।

(i) ও (ii) থেকে ঃ $\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{x} y^{\beta-1}} = \frac{P_x}{P_y}$ বা $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} . \frac{P_x}{P_y}$

$$\therefore\ y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{Px}{Py}\right)x.$$

এই y এর মান বাজেট রেখার সমীকরণে বসালে ঃ

$$xP_x + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\left(\frac{px}{py}\right)x.Py = M \Rightarrow xPx + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).xp_x = M$$

$\Rightarrow xPx\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = M \qquad \therefore\ x = \frac{\alpha M}{P_x(\alpha+\beta)}$ এবং x এর মান $y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{P_x}{P_y}\right).x$ এ বসালে ঃ $y = \frac{\beta M}{P_y(\alpha+\beta)}$

উদাহরণ (২) যদি উপযোগিতা অপেক্ষক U = u (x, y) = (x+2) (y+1) হয়, x দ্রব্যের একক মূল্য Rs. 4, ও y দ্রব্যের একক মূল্য Rs. 6 ও ব্যক্তির আয় Rs. 130 হয় তবে x ও y র কোন মানের জন্য উপযোগীতা সর্বোচ্চ হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ U = (x + 1)(y + 1) এবং বাজেট রেখার সমীকরণ M = $p_x x + p_y y$ = 4x + 6y = 130

$$\therefore\ L = (x+2)(y+1) + \lambda[130 - 4x - 6y]$$

$$Lx = \frac{\partial L}{\partial x} = (y+1) = 4\lambda = 0 \qquad ..... (1)$$

$$Ly = \frac{\partial L}{\partial y} = (x+2) - 6\lambda = 0 \qquad ......(2)$$

$$L\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 130 - 4x - 6y = 0 \qquad ......(3)$$

উপরিউক্ত সমীকরণ তিনটি সমাধান করলে

$x^* = 16$ ও $y^* = 11$ হবে।

দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত অনুসারে

$$\left|\bar{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 9x & 9y \\ 9x & Lxx & Lxy \\ 9y & Lyx & Lyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 48 > 0$$

সুতরাং $x^* = 16$ একক ও $y^* = 11$ একক এই মানে উপযোগিতা অপেক্ষকের মান চরম হবে

$U^* = (16 + 2)(11 + 1) = 18 \times 12 = 216$

উদাহরণ (৩) $C = 3x + 4y$ এই ব্যায়ের $2xy = 337.5$ এই বাধা সমীকরণের সাপেক্ষে অবম মান দেখাও।

সমাধান ঃ $C = 3x + 4y$ $\qquad 2xy = 337.5$

$L = 3x + 4y + \lambda[337.5 - 2xy]$

$$Lx = 3 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1.5}{y} \qquad ....(1)$$

$$Ly = 4 - 2x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x} \qquad .....(2)$$

$C\lambda = 337.5 - 2xy = 0$

(1) ও (2) সমাধান করে পাই ঃ $\frac{1.5}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow y = 0.75x$

বাধা সমীকরণের মাধ্যমে ঃ $337.5 = 2x(0.75x) = 1.5x^2$

$\therefore x^2 = 225 \quad x^* = 15 \ (x > 0)$

সুতরাং $y^* = 11.25$, ও $y^* = 0.133$

আবার $Lxx = 0, Lyy = 0, Lxy = Lyx = -2\lambda$

$gx = 2y, \quad gy = 2x$

$$\therefore \left|\bar{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2x \\ 2y & 0 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 16\lambda xy < 0$$

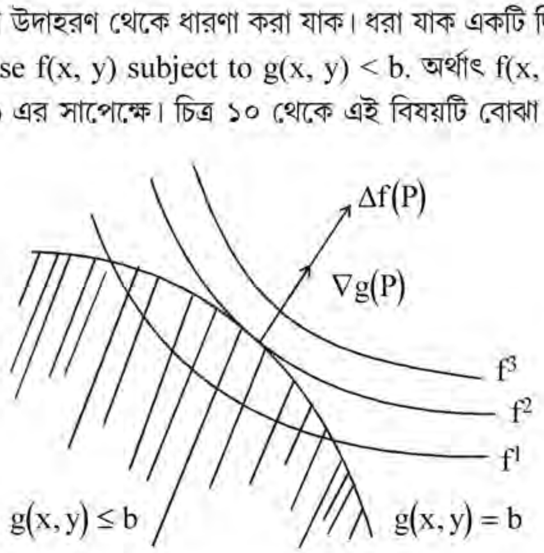
(কারণ $x, y, \lambda > 0$)

অর্থাৎ $|\bar{H}|$ একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট নির্ণায়ক

$\therefore$ $x^* = 15$ ও $y^* = 11.25$ এই মানে C অবম মান হয় ও $C^* = 3 \times 15 + 4 \times 11.25 =$ Rs. 90 হবে।

6.11.1 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন ও অসমতাযুক্ত বাধা সমীকরণ (Constrained optimization with in equality constraint)

বিষয়টি একটি সাধারণ উদাহরণ থেকে ধারণা করা যাক। ধরা যাক একটি দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষক ও অসম বাধা হলো maximise $f(x, y)$ subject to $g(x, y) < b$. অর্থাৎ $f(x, y)$ কে চরম মানে উন্নিত করতে হবে $g(x, y) < b$ এর সাপেক্ষে। চিত্র ১০ থেকে এই বিষয়টি বোঝা যাবে।



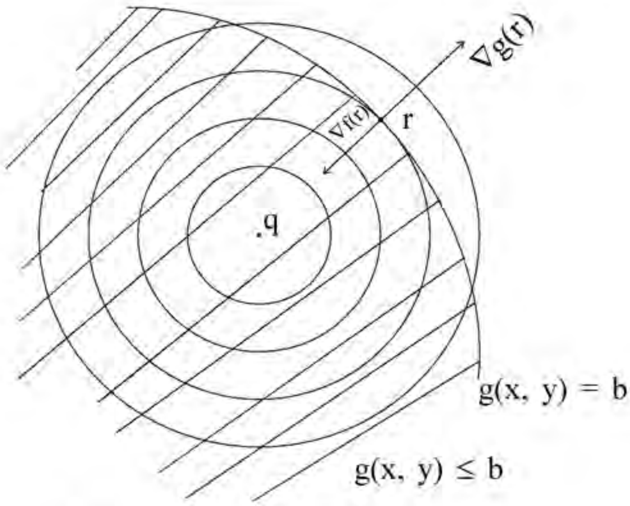
চিত্র ১০ ঃ ∇f ও ∇g p এর চরম মানের দিকে (∇f & ∇g point in the same direction at the maximizer P)

উপরের চিত্র $g(x, y) = b$ রেখাটির বাঁদিকে অঞ্চল $g(x, y) \leq b$. f এই উদ্দেশ্য অপেক্ষকের লেভেল সেটগুলি f^1, f^2, f^3 হিসাবে চিহ্নিত করা হয়েছে যেখানে সর্বোচ্চ লেভেল রেখা f^2 বাধা রেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করছে। যেহেতু P বিন্দু বাধা সেটের সীমানাতে (boundary) আছে যেখানে $g(x, y) = b$; তাই এই বাধাকে বলা হবে বাঁধাই সীমাবদ্ধতা (Binding constraint), P বিন্দুতে। লক্ষণীয় যে $\nabla f(P)$ সেই দিকটি নির্দেশ করছে যেখানে f ; p বিন্দুতে আরো দ্রুত বৃদ্ধি পাচ্ছে। আবার $\nabla g(p)$ $g(x, y) \geq b$ সেটটিকে নির্দেশ করছে। যেহেতু p বিন্দু; $g(x, y) \leq b$ সেটে f কে চরম করে, সুতরাং f এর গ্র্যাডিয়েন্ট (gradient), সীমাবদ্ধ সেটকে (constraint set) নির্দেশ করবে না। তা যদি করতো তাহলে $g(x, y) \leq b$ এই সীমানাতেই f কে আরো বাড়ানো যেত। সুতরাং $\nabla f(p)$; $g(x, y) \geq b = f$ এর দিকেই নির্দেশ করবে। অর্থাৎ $\nabla f(p)$ ও $\nabla g(p)$ উভয়ই একই দিক নির্দেশ করবে। তাহলে যদি $\nabla f(p)$ $\nabla g(p)$ র কোনো গুণক (Multiple) হয়, এবং λ তার গুণাংক হয় (multiplier) তাহলে বলা যায় $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ বা $\lambda \nabla f(p) - \lambda \nabla g(p) = 0$ এক্ষেত্রে $\lambda \geq 0$ হবে।

এবার যদি ল্যাগ্রাঞ্জ গঠন করা হয় তা হবে ঃ $L(x, y, \lambda) = f(x,y) - \lambda[g(x, y) - b]$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \text{ ও } \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

এবার $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ নির্ণয় করার আগে বিবেচনা করা প্রয়োজন যে, ধরা যাক চরম f, $g(x, y) \leq b$ এই সীমা সেটের $g(x, y) = b$ তে নয়, বরং সেই বিন্দুতে অবস্থিত যেখানে $g(x, y) < b$ চিত্র ১১ f এর চরম মান হলো সীমাবদ্ধ সেটের ভিতরে q বিন্দুতে। লেভেল সেট $g(x, y) = b$ এর উপর অবস্থিত r বিন্দুতে,



চিত্র ১১ ঃ যে অবস্থায় সীমা বাঁধাই নয়।

f ও g এর লেভেল সেট পরস্পর স্পর্শক হয়েছে, কিন্তু ∇f ও ∇g বিন্দু r বিন্দু থেকে বিপরীত দিক নির্দেশ করছে, বা বিপরীতমুখী হয়েছে। যেহেতু q বিন্দুতে, $g(x, y) < b$; সুতরাং সীমানাটি q বিন্দুতে বা constraint হলো বাঁধাই বিহীন (non binding) অর্থাৎ $\frac{\partial f}{\partial x}(q) = 0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y}(q) = 0$ । এখানে q হলো স্থানীয় চরম মান। এখানে ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হলো $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$. এবং $\frac{\partial L}{\partial x}$ ও $\frac{\partial L}{\partial y}$ কে শূন্যর সমান করা হবে যদি $\lambda = 0$ হবে। $\lambda = 0$ অর্থ বাধা সমীকরণকে চরম বিন্দুর ক্রিয়াশীল না করা (not binding)।

সুতরাং বাঁধাই সীমাবদ্ধতার ক্ষেত্রে $g(x, y) - b = 0$ এবং $\lambda > 0$ এবং যখন সীমাবদ্ধতা বাঁধাই নয় তখন $\lambda = 0$ যে অবস্থায় এই দুই অসমতার যে কোনো একটি ক্রিয়াশীল হবে তাকে বলা হয় পরিপূরক শিথিলতা অবস্থা (complementary slackness condition) এই দুই অবস্থা অর্থাৎ হয় $g(x, y) - b = 0$ বা $\lambda = 0$ কে $\lambda[g(x, y) - b] = 0$ হিসাবে লেখা যায়।

সমগ্র আলোচনাটি গঠনগতভাবে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অনুসারে উপস্থাপন করা যায় ঃ

কোনো একটি অসম সীমাবদ্ধতাতর সাপেক্ষে যদি একটি অপ্টিমাইজেশন সমস্যাকে বিবেচনা করা হয় যেখানে অবকলনযোগ্য অবতল উদ্দেশ্য অপেক্ষক হলো f(x, y) এবং সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হলো $g(x, y) \geq 0,\ x, y \geq 0$ তাহলে সংশ্লিষ্ট সমস্যাটি হল ঃ

maximize f(x, y) subject to $g(x, y) \geq 0\ (x, y) \geq 0$

এবং সংশ্লিষ্ট ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হলো ঃ

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

এই সমস্যার প্রথম ক্রমের আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তকে বলা হয় কুন টাকার শর্ত (Kunn Tucker conditions)। শর্তগুলি হলো ঃ

১। (ক) $\frac{\partial F}{\partial x} = fx(x^*, y^*) + \lambda^* gx(x^*, y^*) \leq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = fx(x^*, y^*) + \lambda^* gy(x^*, y^*) \leq 0$$

(খ) $x, y > 0$

(গ) $x\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

২। (ক) $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x^* y^*) \geq 0$ (খ) $\lambda \geq 0$ (গ) $\lambda^* \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$

(গ) এর শর্তগুলিই হলো পরিপূরক শিথিলতার শর্ত।

উদাহরণ (১) নিম্নলিখিত বাধাযুক্ত সবচেয়ে কাম্য অবস্থায় (Optimization) সমস্যাটি বিবেচনা কর ঃ $c(x, y) = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$ সর্বনিম্ন করো যেটিতে বাধা হলো উৎপাদিত দ্রব্যের পরিমাণ $x + y < 30$। Kunn-Tucker শর্তগুলি লেখ এবং x ও y এর কাম্য মানগুলি নির্ণয় করো (optimum values)।

Min $C(x, y) = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$

Subject to $x + y < 30$ বা $- x - y \geq 30$

ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক ঃ

$Z = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y + \lambda\ [-30 + x + y]$

কুন-টাকার শর্তগুলি হলো ঃ

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 10x - 80 + \lambda \geq 0\ ;\ x\frac{\partial z}{\partial x} = 0\ ;\ x \geq 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y - 32 + \lambda \geq 0\,;\, y\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,;\, y \geq 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = -30 + x + y \leq 0\,;\ \lambda\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0\,;\, \lambda \geq 0$$

ধরা যাক $x > 0$ ও $y > 0$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ এবং $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ পরিপূরক শিথিলতা শর্ত অনুসরণ করে

$\therefore 10x - 10 + \lambda = 0$ ও $2y - 32 + \lambda = 0$

আরো ধরা যাক $\lambda = 0$ তাহলে পরীক্ষা সমাধান (trial solution) :

$10x - 80 = 0 \ \therefore\ x = 8 > 0$

$2y - 32 = 0 \ \ \therefore\ y = 16 > 0$

এবং x ও y এর মান $x + y \leq 30$ কে পূরণ করে। $\therefore\ x = 8,\ y = 16,\ \lambda = 0$ এই অঋণাত্মক মান হবে সমাধান।

6.11.2 রৈখিক প্রোগ্রামিং (Linear Programming)

এই তত্ত্বে কিভাবে একটি সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশনের সমস্যার সমাধান করা যায়, বিশেষত যেখানে একটি রৈখিক উদ্দেশ্য অপেক্ষকের রৈখিক অসমতা সীমাবদ্ধ অপেক্ষকগুলির সাপেক্ষে (linear inequality constraints) সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তা দেখানো যায়। বিভিন্ন অর্থনৈতিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে এর প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

একটি সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা, যেখানে কেবলমাত্র দুটি সিদ্ধান্ত চলরাশি (decision valuables) আছে তাকে প্রকাশ করা হয় ঃ

Z কে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করা হয় যেখানে Z = c1x1 + c2x2 ...... উদ্দেশ্য অপেক্ষক

Subject to : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ অসমতা বাধা

....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$

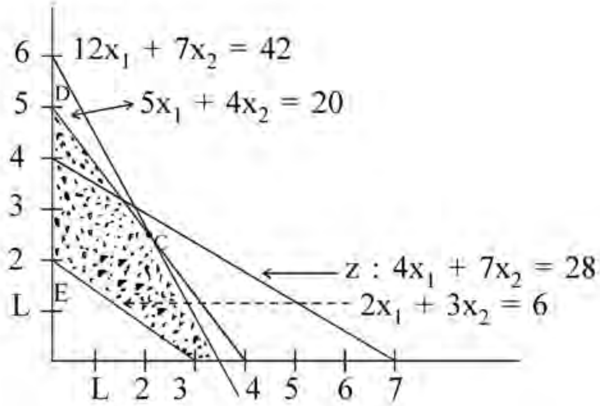
এবং $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ অঋণাত্মক বাধা নীচের উল্লেখিত উদাহরণে লেখচিত্রের সাহায্যে কিভাবে এর সমাধান করা যায় তা দেখানো হল।

(১) চিত্রের সাহায্যে সমাধান করো ঃ

Maximize $Z = 4x_1 + 7x_2$

Subject to $12x_1 + 7x_2 \leq 42$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$



চিত্রে প্রদত্ত তিনটি বাধা ও উদ্দেশ্য উপেক্ষককে প্রথম চতুর্থাংশ আঁকা হলো। ABCDE হলো বাধা দ্বারা সমর্থিত সম্ভাব্য অঞ্চল (feasible region)। এই অঞ্চলের শীর্ষবিন্দুগুলি হলো ঃ A(3, 0) ; B (7/2, 0) ; C (), D(0, 5) ও E(0, 2) এই বিন্দুগুলি যদি উদ্দেশ্য অপেক্ষকে বসানো হয় তবে উদ্দেশ্য অপেক্ষকের মানগুলি হবে ঃ $Z_A = 12$, $Z_B = 14$, $Z_C = \frac{1472}{65}$, $Z_D = 35$ ও $Z_E = 14$

সুতরাং Z, D(0, 5) বিন্দুতে সর্বাধিক হয়েছে এবং Z এর চরম মান হলো 35।

উদাহরণ (২) একটি শর্ত A ও B দুটি দ্রব্য প্রস্তুত করে। ফার্মটির দুটি উৎপাদনক্ষেত্র আছে যেখানে A ও B একসাথে প্রস্তুত হয় নিম্নলিখিত পরিমাণ অনুসারে প্রতি ঘণ্টায় ঃ

	প্রথম ফ্যাকটরি	দ্বিতীয় ফ্যাকটরি
A দ্রব্য	10	20
B দ্রব্য	25	25

ফার্মটি A দ্রব্যের 300 একক এবং B দ্রব্যের 500 এককের অর্ডায় পায়। দুটি ফ্যাকটরি চালানোর ঘণ্টাপ্রতি ব্যায় 10,000 ও 8000 টাকা। এই অর্ডারটির সর্বনিম্ন ব্যয় অবলম্বনে ফ্যাকটরি দুটি কত ঘণ্টা চালানো যাবে সেই সমস্যাটি রৈখিক প্রোগ্রামিং গঠনের মাধ্যমে সমাধান করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক x_1 ও x_2 হলো উক্ত অর্ডারটি পূরণ করার ক্ষেত্রে যত ঘণ্টা ফ্যাকটরি দুটি চালানো হবে সেই নির্দিষ্ট ঘণ্টা। সুতরাং A দ্রব্য তৈরি হবে 10x1 + 20x2 ও B দ্রব্য প্রস্তুত হবে $25x_1 + 25x_2$। যেহেতু অর্ডার হলো A দ্রব্যের ক্ষেত্রে 300 একক ও B দ্রব্যের ক্ষেত্রে 500 একক;

$$\therefore \; 10x_1 + 20x_2 \geq 300$$
$$25x_1 + 25x_2 \geq 500$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

এখন x_1 ও x_2 ঘণ্টা যদি দুটি ফ্যাকটরী কাজ করে তাহলে মোট ব্যয় $10000\ x_1 + 8000\ x_2$

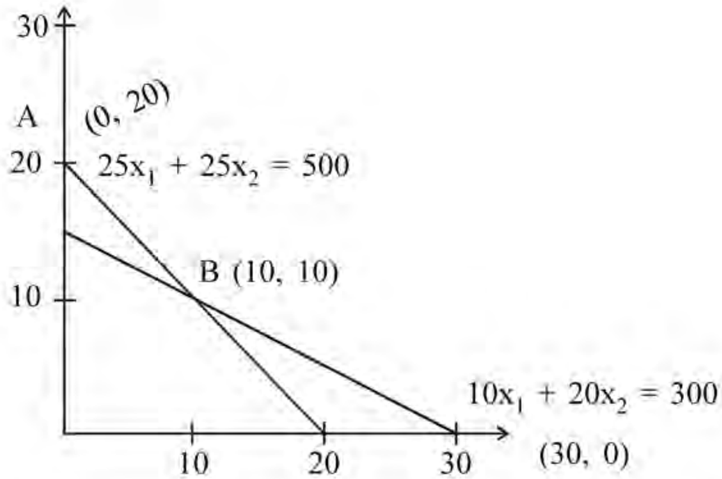
সুতরাং সমস্যাটি হবে ঃ

$$\min\ 10000\ x_1 + 8000\ x_2$$

$$\text{Subject to } 10x_1 + 20x_2 \geq 300$$

$$25x_1 + 25x_2 \geq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



যেহেতু বাধা সমীকরণ ≥ ধরনের ও $x_1, x_2 \geq 0$ সুতরাং সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল S হবে উত্তর পূর্ব দিকে।

B বিন্দু প্রাপ্ত হয় $10x_1 + x_2 = 300$ ও $25x_1$ ও $25x_2 = 500$ এর পারস্পরিক সমাধানে।

এখন A বিন্দুতে ব্যয় ঃ $8000 \times 20 = 160000$ টাকা

B বিন্দুতে ব্যয় ঃ $10000 \times 10 + 8000 \times 10 = 180,000$ টাকা

C বিন্দুতে ব্যয় ঃ $10000 \times 30 = 300000$ টাকা।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান হলো ফ্যাক্টরী 2 কে 20 ঘণ্টা চালানো যাতে ন্যূনতম খরচ = 160,000 টাকা হয়।

রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ দ্বৈততা (Duality in Linear Programming) :

চরম ও অবম মান সংক্রান্ত প্রত্যেকটি রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর সমস্যাকেই প্রাতিযঙ্গিক অবম ও চরম মান সংক্রান্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ রূপান্তর করা যায়। মূল সমস্যাকে (Primal) প্রাইম্যাল সমস্যা ও সহকারী রূপান্তরকে দ্বৈত (Dual) সমস্যা বলা হয়।

n সংখ্যক চলরাশির ক্ষেত্রে উভয় সমস্যাকে দেখানো হল ঃ

$$\text{Maximise } Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots\ldots + C_nx_n$$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x1, ..., xn \ge 0$$

ম্যাট্রিক্সের গঠন অনুসারে ঃ

$$\text{Max } Z = C' x$$
$$\text{subject to : } Ax \le b$$
$$X \ge 0.$$

যেখানে

এর দ্বৈতরূপ হল ঃ u1, u2, ..., um এই চলরাশির মান নির্ণয় করা যেখানে

$$\text{Minimize } Z^* = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m$$
$$\text{subject to : } a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \ge c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m \ge c_2$$
$$...$$
$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \ge c_m$$

$u_i \ge 0 \ \forall i = 1, 2, ..., m.$

ম্যাট্রিক্সের গঠনানুযায়ী ঃ $Z^* = b'u$

subject to $A' \underset{\sim}{U} \ge C' \quad \underset{\sim}{U} \ge 0$

$x_1, x_2, ..., x_n$ ও $u_1, u_2, ..., u_n$ হলো যথাক্রমে প্রাইম্যাল ও ডুয়াল চলরাশি।

রৈখিক প্রোগ্রামিং এর তিনটি প্রধান উপপাদ্য ঃ

(১) যদি $(x_1, x_2, ..., x_n)$; প্রাইম্যাল সমস্যার সম্ভাব্য সমাধান ও $(u_1, u_2, ..., u_n)$, দ্বৈত সমস্যায় ফিজিবল হয় তাহলে

$b_1u_1 + ... + b_mu_m > c_1x_1 + ... + c_nx_n$

অর্থাৎ দ্বৈত উদ্দেশ্য অপেক্ষকের মান সর্বদা প্রাইম্যালের অন্তত সমান বা ছোট হবে না। (Dual objective function has a value that is always at least as great as the of the priheal).

(২) ধরা যাক $(x_1^*, ..., x_n^*)$ এবং $(u_1^*, ..., u_m^*)$ প্রাইম্যাল ও দ্বৈত সমস্যায় ফিজিবল; তাহলে

$$C_1x_1^* + ... + C_nx_n^* = b_1u_1^* + ... + b_mu_m^*$$

যেখানে $(x_1^*, ..., x_n^*)$ প্রাইম্যাল সমস্যার সমাধান ও $(u_1^*, ..., u_m^*)$ দ্বৈত সমস্যার সমাধান।

(৩) ডুয়ালিটি উপপাদ্য (Duality Theorem) : যদি প্রাইম্যাল সমস্যার একটি সসীম সর্বোত্তম সমাধান (finite optimal solution) তাহলে দ্বৈত সমস্যার ক্ষেত্রেও তা থাকবে। এবং উভয়ক্ষেত্রেই উদ্দেশ্য অপেক্ষকের প্রাতিষঙ্গিক মানগুলি সমান হবে। যদি প্রাইম্যালের কোনো সীমাবদ্ধ সর্বোত্তম মান (founded optimum) না থাকে তাহলে দ্বৈত সমস্যারও তা থাকবে না।

উদাহরণ ঃ প্রদত্ত LPP র দ্বৈততা নির্ণয় করো।

Minimize $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

Subject to : $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 1$

$6x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$

$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 3$

$4x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত LPP টি ম্যাট্রিক্সের আকারে প্রকাশ করলে হবে ঃ

Minimize Z = C’X subject to $AX \geq b$ $X \geq 0$

যেখানে $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

যদি u_1, u_2, u_3, u_4 ডুয়্যাল চলরাশি হয় তবে দ্বৈত সমস্যা হবে ঃ

Maximize $W = b'U$

subject to $A'U \leq C,\ U \geq 0$

এখানে $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$

এবং সমস্যাটি প্রকাশ করা হবে ঃ

Maximize $W = u_1 + 4u_2 + 3u_3 + 2u_4$

subject to $3u_1 + 6u_2 + 7u_3 + 4u_4 \leq 3$

$5u_1 + u_2 + 2u_3 + 7u_4 \leq 2$

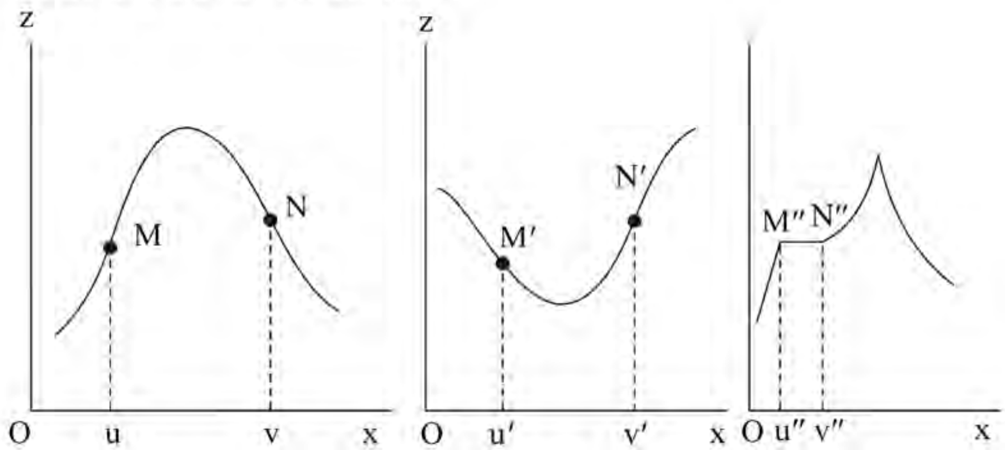
$4u_1 + 3u_2 + 5u_3 - 2u_4 \leq 4$

$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0$

6.12 কিছু অতিরিক্ত বিষয়

ধরা যাক f অপেক্ষকের পরিসরে (domain) যা একটি উত্তল সেট; u এবং v দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু নেওয়া হলো। এবার ধরা যাক uv রেখাংশ ঐ অপেক্ষকের লেখচিত্রে MN চাপ সৃষ্টি করলো এমনভাবে যাতে N বিন্দু, M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় বড় বা সমান। এই অপেক্ষকটি আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে যদি MN চাপের উপর M ও N ব্যতীত সকল বিন্দু M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় বড় বা সমান (N বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট বা সমান) হয়। অপেক্ষকটি কঠোর আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে যদি MN চাপের উপর M ও N ব্যতীত সকল বিন্দু কঠোরভাবে M বিন্দু অপেক্ষা অধিক উচ্চ (কঠোরভাবে N বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট) হয়।

নিম্নের চিত্রে ধারণাটি স্পষ্ট করা হলো।



চিত্র ১২

চিত্র ১২(ক) তে দেখা যাচ্ছে uv এই রেখাংশ অপেক্ষকের পরিসরে এমনভাবে MN চাপের সৃষ্টি করছে যাতে N বিন্দু M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট। অর্থাৎ M ও N এর মধ্যে চাপের উপর অবস্থিত সবকটি বিন্দু M অপেক্ষা অধিক উঁচু। অর্থাৎ অপেক্ষকটি কঠোর আধা অবতল। আবার চিত্র ১২(খ)তে M′N′ চাপের উপর অবস্থিত সবকটি বিন্দুই N′ অপেক্ষা কম উঁচু। এই অপেক্ষকটি হবে আধা উত্তল। চিত্র ১২(গ) তে M″ N″ একটি অনুভূমিক রেখা আছে যেখানে M″N″ এ অবস্থিত সবকটি বিন্দুই সমান উঁচু। এই অপেক্ষকটি আধা অবতল কিন্তু কঠোর আধা অবতল নয়।

6.12.1 আধা অবতল অপেক্ষক

কোনো অপেক্ষক f আধাঅবতল হবে, কেবলমাত্র যদি u এবং v, f অপেক্ষকের পরিসের দুটি যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুজোড়ার, (উত্তল সেটে সংজ্ঞায়িত) সাপেক্ষে এবং $0 < 0 < 1$ র ক্ষেত্রে ঃ

$f(v) \geq f(u) \geq f[\theta u + (1-\theta)v] \geq f(u)$

এবং আধা উত্তল হবে যদি $f(v) \geq f(u) \geq f[\theta u + (1-\theta)v] \geq f(v)$ হয়। কঠোর আধা অবতল বা

কঠোর আধা উত্তলের ক্ষেত্রে দুর্বল অসমতা > বা < এর পরিবর্তে কঠোর অসমতা (Strict inequality) > বা < যথাক্রমে ব্যবহৃত হয়।

যদি f(x) আধা অবতল বা কঠোর আধা অবতল হয় তাহলে –f(x) হবে আধা উত্তল বা কঠোর আধা উত্তল।

যে কোনো অবতল (উত্তল) অপেক্ষক, আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে কিন্তু উল্টোটা সত্যি নয়। আবার যে কোনো কঠোর অবতল (কঠোর উত্তল) অপেক্ষক কঠোর আধা অবতল (কঠোর আধা উত্তল) হবে কিন্তু উল্টোটা সত্যি নয়।

যদি f(x) একটি সরলরৈখিক অপেক্ষক হয় তবে তা আধা অবতল এবং আধা উত্তল হবে।

6.12.2 আধা অবকলের বীজগণিতিক সংজ্ঞা

যদি $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ একটি দুইবার ক্রমাগত অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তাহলে আধাঅবতলতা বা আধা উত্তলতা তার প্রথম ও দ্বিতীয় আংশিক অবকলের মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায়।

বর্ডারকৃত হেসিয়ান নিরাপদ ব্যবহার করে ঃ

$$|B| = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & ..... & f_n \\ f_1 & f_n & f_{12} & ..... & f_{1n} \\ \vdots & & & & \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & ..... & f_{nn} \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে |B| কেবলমাত্র f এর অবকলগুলির উপর নির্ভরশীল। $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ আধা অবতল হবে যদি তার আবশ্যিক শর্ত পূরণ হয় যা হলো

$$|B| \le 0,\ |B_2| \ge 0 .....\quad |B_n| \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} 0 \text{ যদি n বিজোড়/জোড় হয়।}$$

আবার f কঠোর আধা অবতল হবে যদি $|B| < 0$ $|B_2| > 0$ ...... $|B_n| < 0$ যদি n বিজোড় এবং যদি n জোড় হয় এক্ষেত্রে $|B_1|, |B_2|$ ...... $|B_n|$ হলো |B| এর মুখ্য মাইনর বা ঃ

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} \quad |B_2| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} .... |B_n| = |B|$$

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $f(x_1, x_2,) = x_1x_2^2$ যা এর উপর সংজ্ঞায়িত সেটি আধা অবতল।

সমাধান ঃ এখানে $|\bar{H}_2|$ বা $|\bar{B}_2| = |\bar{B}|$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2^2 & 2x_1x_2 \\ x_2^2 & 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix}$$

$= -x_2^2(2x_1x_2^2 - 4x_1x_2^2) + 2x_1x_2(x_2^2 2x_2) = 6x_1x_2^4 > 0$ যখন $x_1, x_2 > 0$

সুতরাং f কঠোর আধা অবতল।

উদাহরণ (২) ঃ দেখাও যে $\hbar^3_{++}$ এর উপর সংজ্ঞায়িত $y = x_1^{1/4}\ x_2^{1/3}\ x_3^{1/4}$ আধাঅবতলতার শর্তপূরণ করে।

সমাধান ঃ $\left|\bar{H}_2\right| = \dfrac{7}{144} x_1^{5/4}\ x_2^{5/4}\ x_3^{3/4} > 0$ এবং $1\bar{H}_3 = \bar{H} < 0$

$$H = -f_1\begin{vmatrix} f_1 & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{32} & f_{33}\end{vmatrix} + f_2\begin{vmatrix} f_1 & f_{11} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{33}\end{vmatrix} - f_1\begin{vmatrix} f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \\ f_3 & f_{31} & f_{33}\end{vmatrix}$$

প্রথম পদ ঃ $-f_1\dfrac{12}{576}\ x_1^{-1/4}\ x_2^{-1/2}\ x_3^{-5/4}$

বাকী দুই পদ যদি সরল করা যায় তাহলে $\left|\bar{H}\right| < 0$ হয়। সুতরাং f আধা অবতল হয়।

6.13 এনভেলপ উপপাদ্য

ধরা যাক f হলো একটি অপেক্ষক যা একটি চলরাশির উপর ও একটি স্থিতিমাপ বা প্যারামিটারের উপর নির্ভর করে, যে দুটি হলো যথাক্রমে x ও α। এবার যদি f(x, a) কে চরম বা অবম করা হয় x এর সাপেক্ষে, α কে স্থির রেখে অর্থাৎ max(min)xf(x, α) করা হয় তাহলে x এর যে মান f কে সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন করে তা α এর উপর নির্ভর করে। ধরা যাক সেই মান হলো x*(α)। এই x*(α) যদি f(x, α) তে বসানো হয় তাহলে f*(α) = f(x*(α), α) পাওয়া যাবে যাকে বলা হয় মূল্য অপেক্ষক (value function) যদি f*(r) অবকলনযোগ্য হয়, তাহলে চেইন নিয়মের (chain rule) ফলে

$\dfrac{df^*(\alpha)}{d\alpha} = f_1'(x^{\forall}(\alpha),\alpha)\dfrac{d(x^*(\alpha))}{d\alpha} + f_2'(x^*(\alpha),\alpha)$ প্রাপ্ত হবে। এখন যদি x পরিবর্তনের পরিসরে, x*(α) এই বিন্দুতে f(x, α) এর চূড়ান্ত মান হয় (extreme point) তাহলে হবে।

$\therefore\ \dfrac{df^{\forall}(\alpha)}{d\alpha} = r$ এর পরিবর্তনের ফলে মূল্য অপেক্ষকের পরিবর্তন $= f_2'(x^*(\alpha),\alpha)$

α পরিবর্তনের ফলে f*(α) এই মান অপেক্ষক দুটি কারণে পরিবর্তিত হয়। প্রথমতঃ যেহেতু f(x, α) মধ্যে দ্বিতীয় চলরাশি α তাই α যখন পরিবর্তিত হয় তখন f* সরাসরি পরিবর্তিত হয়। আবার দ্বিতীয়তঃ a র পরিবর্তনের ফলে x*(α) অর্থাৎ অপেক্ষকটির মূল্য পরিবর্তিত হয় এবং ফলস্বরূপ f(x*(α), α) ও পরোক্ষভাবে পরিবর্তিত হয়। উপরিল্লিখিত ফর্মুলা (1) থেকে দেখা যাচ্ছে যে সম্পূর্ণ ফলাফল f(x* (α),

α) কে α র সাপেক্ষে আংশিক অবকলন করলেই পাওয়া যাবে এবং x* এর α র উপর নির্ভরশীলতার পরোক্ষ প্রভাবটি ধরা হচ্ছে না।

এনভেলপ উপপাদ্য টি হলো ঃ যদি $f(\alpha) = \max_x f(x, \alpha)$ এবং যদি $x^*(\alpha)$; x এর সেই মান যা $f(x, \alpha)$ কে সর্বাধিক করে হয়, তাহলে

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\alpha)} \quad j = 1, \ldots.., k$$ যদি আংশিক অবকলের অস্তিত্ব থাকে।

এবার vector notation ব্যবহার করে x= (x1, ..., xn) এবং a = (a1, ..., ak) হয় এবং বাধাযুক্ত অপ্টিমাইজেশন সমস্যা যদি হয় max(min)x f(x, a) subject to g ; (x, r) = 0 j = 1, ..., m তাহলে এনভেলপ উপপাদ্য অনুযায়ী ঃ

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{\partial L(x,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right]_{x=x^*(\alpha)} \quad i = 1, \ldots.., k$$

6.14 ল্যাগ্রাঞ্জ গুণাঙ্কের ব্যাখ্যা

একটি বাধাযুক্ত চরম সমস্যা গণ্য কার যাক ঃ

maximize $f(x_1, x_2) = y$ subject to $g(x_1, x_2) = k$ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান অপেক্ষক ঃ

$$L = f(x_1,\ x_2) + \lambda\left[k - g(x_1, x_2)\right]$$

প্রথম বর্গীয় সমীকরণ ঃ $L_1 = f_1(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = 0$

$$L_2 = f_2(x_1, x_2) - \lambda g_2(x_1, x_2) = 0$$

$$L_\lambda = k - g(x_1, x_2) = 0$$

তিনটি সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে ঃ

$$\lambda = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

এখন খাম উপপাদ্যের মাধ্যমে λ কে আরও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা যাবে। যদি প্রথম বর্গীয় তিনটি সমীকরণ থেকে x_1, x_2, λ এর মান নির্ণয় করা যায় তাহলে তিনটি পছন্দ অপেক্ষক (explicit choice function) পাওয়া যাবে যা হলো ঃ $x_1^*(k)$, $x_2^*(k)$ ও $\lambda^*(k)$ এবং এর উপর ভিত্তি করে উদ্দেশ্য অপেক্ষক হবে ঃ $\phi(k) = f(x_1{}^*(k), x_2{}^*(k))$ বাধাযুক্ত চরম অবস্থার মডেলে এনভেলপ উপপাদ্য প্রয়োগ করল ঃ

$$\phi_k(k) = \frac{\partial L}{\partial K} = \lambda^*(k)$$

অর্থাৎ ল্যাগ্রাঞ্জ গুণাঙ্ক হলো ঃ যে হারে বাধা বা constraint এর প্যারামিটার পরিবর্তনের ফলে উদ্দেশ্য অপেক্ষকের চরম (বা অবমের ক্ষেত্রে ন্যূনতম) মানের পরিবর্তন হয় সেই নির্দিষ্ট হারই হলো ল্যাংগ্রাঞ্জ গুণাঙ্ক।

’ [illegible] ¢Äx [illegible]þë!˜ $U = U(x_1, x_2)$ এই উপযোগিতা অপেক্ষক হয় এবং বাধা সমীকরণ হয় $M = p_1x_1 + p_2x_2$ এই বাজেট সমীকরণ;

$L = U(x_1, x_2) + \lambda\ [M - p_1x_1 - p_2x_2]$

$L_1 = U_1 - \lambda p_1 = 0 \qquad L_2 = U_2 - \lambda p_2 = 0$

$L_\lambda = N - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$ হলো প্রথম বর্গীয় অবস্থা, যেখানে U কে চরম মানে উত্তীর্ণ করা হলো নির্ধারিত অপ্টিমাইজেশন সমস্যা।

এক্ষেত্রে যথেষ্ট শর্ত হলো বর্ডারযুক্ত হেসিয়ান নির্ণায়ক অর্থাৎ

প্রথম বর্গীয় শর্ত সমাধান করলে পাওয়া যায়

$x_1^* = x_1^M\ (p_1, p_2, M)$

$x_2^* = x_2^M\ (p_1, p_2, M)$

$\lambda^* = \lambda^M\ (p_1, p_2, M)$

এখানে x_1^* ও x_2^* কে বলা হয় স্থির আর্থিক আয় ভিত্তিক চাহিদা অপেক্ষক (Money income held constant demand curves) বা মার্শেলীয় চাহিদা অপেক্ষক।

যদি এই চাহিদা অপেক্ষক দুটি উপযোগিতা অপেক্ষকে বসানো হয় তাহলে ঃ

$U^*\ (p_1, p_2, M) = U[x_1^M\ (p_1, p_2, M), x_2^M\ (p_1, p_2, M)]$ কে বলে পরোক্ষ উপযোগিতা অপেক্ষক বা Indirect utility function.

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1{}^M}{\partial M} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2{}^M}{\partial M} = U_1\frac{\partial x_1{}^M}{\partial M} + U_2\frac{\partial x_2{}^M}{\partial M}$$

প্রথম বর্গীয় শর্তভিত্তিক সমীকরণ থেকে ঃ $U_1 = \lambda^M p_1$ ও $U_2 = \lambda^M p_2$

$$\therefore\ \frac{\partial U^*}{\partial M} \equiv \lambda^M\left(p_1\frac{\partial x_1{}^M}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2{}^M}{\partial M}\right) \qquad .....(1)$$

বাজেট সীমা ঃ $M = p_1x_1 + p_2x_2$

$$\frac{\partial M}{\partial M} = p_1\frac{\partial x_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial M} \qquad 1 = p_1\frac{\partial x_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial M}$$

(1) এ প্রতিস্থাপন করে $\frac{\partial U^*}{\partial M} = \lambda^M$

এনভেলপ উপপাদ্য অনুসারে ঃ $\frac{\partial U^*}{\partial M} = \frac{\partial L}{\partial M} = \lambda^M$

λ^M হলো আর্থিক আয়ের প্রান্তিক উপপাদ্য।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক $f(x, y, \alpha) = \alpha x^2 - 2x + y^2 - 4\alpha y$

যেখানে α হলো একটি প্যারামিটার। প্রত্যেকটি স্থির α এর জন্য $[x^*(\alpha), y^*(\alpha)]$ এর মান নির্ণয় করো যা f অপেক্ষককে (x, y) এর সাপেক্ষে স্থিতাবস্থায় (stationary) আসবে। $f^*(\alpha) = f[x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha]$ এই মান অপেক্ষক (value function) নির্ণয় করো এবং এই ক্ষেত্রে এনভেলপ উপপাদ্যটি পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ $f(x, y, \alpha) = \alpha x^2 - 2x + y - 4\alpha y$

প্রথম বর্গীয় শর্তানুসারে ঃ $f'x(x, y, \alpha) = 2\alpha x - 2 = 0$

$$f'y(x, y, \alpha) = 2y - 4\alpha = 0$$

সমাধান করলে $x = x^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$y = y^*(\alpha) = 2\alpha$$

সুতরাং মান অপেক্ষক হল ঃ

$$f^*(\alpha) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + (2\alpha)^2 - 4\alpha(2\alpha) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 4\alpha^2$$

$$\frac{d}{d\alpha}f^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$$

আবার $\frac{\partial}{\partial \alpha}[f(x, y, \alpha)] = x^2 - 4\alpha = \frac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$; হয় $[x^*(\alpha), y^*(\alpha)]$ বিন্দুতে।

সুতরাং $\frac{d}{d\alpha}f^*(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[f(x, y, \alpha)] = \frac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$ এনভেলপ উপপাদ্য প্রমাণ করে।

6.15 সংক্ষিপ্তসার

সমগ্র অধ্যায়টিতে বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের উত্তলতার ধারণা, অপ্টোমাইজেশনের ধারণা ও শর্ত, আধা অবকল অপেক্ষক, রৈখিক প্রোগ্রামিং ইত্যাদি বিষয়ক আলোচনা করা হয়েছে।

6.16 প্রশ্নবলী

১। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির মান 2 :

(ক) $z = (x_1 + x_2)^2$ অপেক্ষকটি কি উত্তল, অবতল, কঠোর উত্তল, কঠোর অবতল বা কোনোটিই না-এর মধ্যে কোনটি হবে দেখাও।

(খ) আধা উত্তলতা কাকে বলে?

(গ) দ্বৈততা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য বিবৃত করো।

(ঘ) $y = 2x_1^2 + x_2^2$ এর স্থিতাবস্থা মান নির্ণয় করো (stationary values)

(ঙ) এনভেলপ উপপাদ্য বিবৃত করো।

২। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির পূর্ণমান 5

(ক) a, b, c র মানের উপর কোন কোন শর্ত আরোপ করলে নীচের অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল হবে?

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

(খ) $Z = -x^2 + xy - y^2 + x + 5y$ এর চূড়ান্ত মান নির্ণয় করো এবং দেখাও যে তারা সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন?

(গ) বিচার করো $Z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$ এর চরম বা অবম মান আছে কিনা এবং থাকলে তার মান কত?

(ঘ) $f(x_1, x_2) = x_1^2\ x_2^3$ অপেক্ষকটি কি আধা অবতল? বিচার করো।

(ঙ) $f(x, y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$ এর সংকট বিন্দুগুলি (critical paints) নির্ণয় করো।

৩। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান 10

(ক) যদি উপযোগীতা অপেক্ষক হয় $u = x^{0.6}\ y^{0.25}$ এবং $P_x = 8$, $P_o = 5$ আর ব্যক্তির আয় $M = 680$ হয় তাহলে প্রদত্ত বাজেট রেখার সাপেক্ষে উপযোগীতা অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো এবং যে সংকটবিন্দু গুলির মানের জন্য অপেক্ষকটি সর্বোচ্চ হয়, সেই মানগুলি কি কি?

(খ) একজন একচেটিয়া কারবারী দুটি সম্পর্কিত দ্রব্য প্রস্তুত করে যাদের চাহিদা অপেক্ষক হলো $P1 = 80 - 5Q_1 - 2Q_2$, $P_2 = 50 - Q_1 - 3Q_2$ এবং মোট ব্যয় $C = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$. কারবারী মুনাফা সর্বোচ্চকারী দ্রব্যগুলির পরিমাণ এবং দামগুলি নির্ণয় করো।

(গ) নিচের সমস্যাটির লেখচিত্রভিত্তিক সমাধান নির্ণয় করো।

Maximize $R = q_1 + 2q_2$

subject to : $q_1 + q_2 \leq 8$

$2q_1 + q_2 \leq 14$

$$q_1, q_2 \geq 0$$

(ঘ) নিচের সমস্যাটি বিবেচনা করো ঃ

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to :} & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

যদি $y_1^* = 0$, $y_2^* = 4/3$, $y_3^* = 1/3$ ও $y_4^* = 0$ এর দ্বৈত সমস্যায় সমাধান হয় তাহলে প্রাথমিক বা primal সমস্যার সমাধান নির্ণয় করো ও দ্বৈততা উপপাদ্য (Quality theorem) পরীক্ষা করো।

(ঙ) যদি মুনাফা $p = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ হয় তাহলে $x + y = 36$ এই অসমতাভিত্তিক উৎপাদন সীমার সাপেক্ষে মুনাফা সর্বোচ্চকারী x, y এর মান নির্ণয় করো।

6.17 গ্রন্থপঞ্জি

1. Simon and Bluue
2. Renshaw
3. Chaing
4. Tekayana
5. Intrilligator M D (1971) : Mathematical optimisatiri and Economic Theory, Preutice Hall, Inc.

Note

Note

মানুষের জ্ঞান ও ভাবকে বইয়ের মধ্যে সঞ্চিত করিবার যে একটা প্রচুর সুবিধা আছে, সে কথা কেহই অস্বীকার করিতে পারে না। কিন্তু সেই সুবিধার দ্বারা মনের স্বাভাবিক শক্তিকে একেবারে আচ্ছন্ন করিয়া ফেলিলে বুদ্ধিকে বাবু করিয়া তোলা হয়।

-- রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

ভারতের একটা mission আছে, একটা গৌরবময় ভবিষ্যৎ আছে, সেই ভবিষ্যৎ ভারতের উত্তরাধিকারী আমরাই। নূতন ভারতের মুক্তির ইতিহাস আমরাই রচনা করছি এবং করব। এই বিশ্বাস আছে বলেই আমরা সব দুঃখ কষ্ট সহ্য করতে পারি, অন্ধকারময় বর্তমানকে অগ্রাহ্য করতে পারি, বাস্তবের নিষ্ঠুর সত্যগুলি আদর্শের কঠিন আঘাতে ধূলিসাৎ করতে পারি।

-- সুভাষচন্দ্র বসু

Any system of education which ignores Indian conditions, requirements, history and sociology is too unscientific to commend itself to any rational support.

— Subhas Chandra Bose

Price : ₹ **400.00**

(Not for sale to the Students of NSOU)

Published by : Netaji Subhas Open University, DD-26, Sector-I, Salt Lake, Kolkata-700 064 &
Printed at : The Saraswati Printing Works, 2, Guru Prosad Chowdhury Lane, Kolkata 700 006